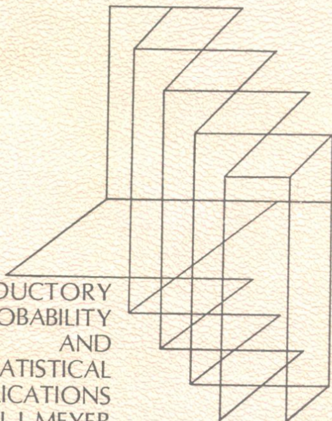
機率導論與統計應用（附解答）

修訂版

曾忠信
黃錦俊合譯
謝茂良



INTRODUCTORY
PROBABILITY
AND
STATISTICAL
APPLICATIONS

PAUL L. MEYER

定價160元



®

新聞局局版
台業字0373號

金川出版社
發行人／王　文　生
地　址／台南市法華街147巷21號
電　話／(06)2255704　　郵撥／0034986－8號

船塢書坊總經銷
地　址／台南市北門路1段74號(原博愛路72號)
電　話／(06)2241795·2257220　　郵撥／0345177－4號
印刷者／信宏美術印刷廠

譯者序言

近代工商業突飛猛進，機率理論與應用日新月異。美國機率學權威Meyer．所著“機率導論及其在統計上的應用”一書，自出版以來，即廣受讀者喜愛，風行各國。

我國目前各大專院校，亦多採用此書。初習者閱讀原文，由於文字隔閡，常不能瞭解其意，影響學習興趣甚大。有志進修機率學科者，英文生疏，雖欲研習亦無法完其所願。譯者有鑒於此，乃利用課餘，歷時年餘，完成翻譯工作。

本書共分十五章，分由譯者三位負責。第一至四章由謝茂良擔任，第五至九章由黃錦俊擔任，第十至十五章由曾忠信擔任。譯者俗務紛紜，付梓倉促，魯魚亥豕，在所難免；且學海無涯，自愧才疏學淺，尚望碩學先進，不吝指正。

本書之完成，承蒙成大統計系黃宗源同學、洪金源同學、成大工管研究所陳通明同學、及成大歷史系藍春華同學等之整理、校對，使本書得以順利完成，在此深表謝意。

謝茂良
黃錦俊 合譯
曾忠信

譯者 謹識
時在民國六十六年
于研究室

目　　錄

第一章　機率概論

§ 1—1　數學模型　(Mathematical Model)

在這章中，我們將要討論宇宙間所發生現象的類型，並建立數學模式以幫助我們更精確的研討這些現象。

首先，我們必須分別清楚現象的本身及其數學模式。雖然，在選取模式時，我們可以憑著自已的判斷選擇，但這數學模式不能影響我們所觀察的現象。

J. Neyman 紐曼教授對此曾經強調：

“我們欲將宇宙間所發生的現象加以探討，必須先依據所觀測的事實，建立一數學模式（確定模式或機率模式）（ determin istic or probabil istic ），且這模式要能簡化事實及刪除不重要的因素。這模式建立的成功與否端賴這模式是否能將現象加以簡化。這模式所導出的結果可能是正確的但也可能不是，因爲這假設的模式並不能保證沒有偏誤。除非在觀測值得到以前，否則通常是很難判定一個數學模式建立的適當與否。爲了要確定一個適當模式，我們必須將數學模式所演繹的結果與眞實觀測值加以比較”。

數學模式可分爲確定模式（ deterministic model ）及機率模式（ probabilistic ）。前者乃指一試驗之條件完全決定其結果，例如我們將一電池置入一電路中，則由數學模式推測的電流爲 $I = E / R$，即爲歐姆定律（ ohm's law ）此數學模式中只要 E 及 R 已知，則其 I 值便可求得。

而且即使重覆上項試驗數次，保持同樣的電路（即 E 及 R 值不變），則得到同樣的一個電流值。因爲任何可能發生偏差的機會很少，所以大致而言，以上的描述（亦即，指這模型而言）已經足夠了！重要的是用來產生電流的乾電池，和觀測電流值的安培計，與及我們使用測量儀器的能力，還有所使用的電線，決定了每次實驗的結果，（可能有些因素在每一次實驗都不盡相同，然而並不會很顯著地影響實驗的結果，例如實驗室中的溫度及濕度，或是讀安培計的人之身高，對於實驗的結果，均可假定沒有什麼影響）。

自然界中有許多的“實驗”，確定模式（ deterministic model ）對其是很合適的。例如，重力法則（ gravitational laws ）精確的描述在某些穩定情形下的落體發生的情形。克卜勒定律（ Kepler's laws ）告訴我們行星的運行。

模型規定了一些現象發生的條件，這些條件決定某些可觀察得到的變數值：像速度的大小，某一定時間內掃過的面積等等。這些常常出現在我們所熟悉的公式裏。例如，我們知道在某些條件下，一物體垂直上拋的距離爲 $s = -16t^2 + v_0 t$，此處 v_0 爲初速，t 爲時間。我們的注意力並不集中在此式子的形式，而是

在 t 和 s 之間的關係，右式的數值可決定左式的值。

就大體而言，確定模型是夠用的，然而有許多現象需要不同的數學模型，這些即非確定模式（Nondeterministic model）或稱之爲機率模式（probabilistic model），另外也常稱之爲隨機模式（stochastic model），在本章後面，我們將討論這些模型是如何描述的，且讓我們先看一些例子。

假定我們有一能放射 α 質點的放射源，藉計數器，我們能記錄在一特定時間內放射之 α 質點數。很顯然的，即使我們知道此放射性物質的確實形狀，大小，化學成份及其質量，我們仍然無法準確預測出放射的質點數，所以似乎沒有一個合宜的模型，使得放射出的質點數 n，爲放射性物質的各種特性的函數，我們只好另外考慮機率模式了！

爲了其他的說明，我們考慮一個有關氣象的情況。我們希望能決定當某一颱風吹過某一地區時，到底有多少雨量，我們需要一些儀器記錄。氣象報告將會給我們一些有關的颱風消息，如各地的氣壓，氣壓變動，風速，颱風中心及其分向等等，但是這些消息僅可以預測雨量的通性（如雨量輕微，中等，大量等），却無法精確地告訴我們有多少雨量，在此不能利用確定模式，而機械模型則可較準確的描述這些情況。

如果已導出此理論（事實上還沒有）則大體上我們可以知道雨量有多少，因此我們利用機率模型。而在放射性物質的例子裏，我們更是要用到機率模式。

簡單的說，確定模式乃指一試驗之條件完全決定其結果，而一非確定模式乃指一試驗之條件僅決定其結果的機率行爲（probabilistic behavior）。

換句話說，在確定模式裏，我們利用“實際的考慮”（physical considerations）去預測的結果，而在機率模式裏，我們則利用同一考慮去說明機率分配。

§1－2 集合介紹 (Introduction to Sets)

爲了研討機率模式（probabilistic model）的基本概念，我們將介紹集合（Sets）的理論，這是一個很廣泛的題材，我們僅僅提出一小部份的觀念。

“集合”是一些東西的統稱。通常以大寫的字母 A，B，……代表之。有三種方法可以判定某些東些是否屬於 A 集合。

(a)列出所有的組成元素（members），如 $A=\{1,2,3,4\}$ 即代表 A 集合包括正整數 1，2，3 及 4。

(b)用文字敍述 A 集合。例如，我們說 A 集合是由 0 到 1 之間所有實數所成的集合。

(c)也可以 $A=\{x \mid 0\leq x\leq 1\}$ 表示 A 集合，亦即具乃是所有 x 所組成的集合，其中 x 是介於 0 與 1 之間的實數。

所有組合集合 A 的個體，我們稱其爲元素（element）當 a 爲 A 的元素時，記爲 $a\in A$；否則爲 $a\notin A$。

另外有兩種特殊的集合，即全集合（ universal set ）及空集合（ empty set ）。通常我們討論集合時，常先訂好討論所涉及的範圍，如所有的實數所成集合或 24 小時內生產線所產出的產品。在這所有考慮的範圍，我們定義其爲全集合（ universal set ），以U表示之。

剩下的一種特殊集合，是如此產生的。假定A集合是由實數x所成的集合，x滿足方程式$x^2+1=0$。當然，我們知道是沒有這種數字的，亦即A集合沒有任何的東西組成，如此特殊的情況，我們定義其爲空集合（ empty set or null set ），以ϕ表示之。

當兩個集合A和B同時被考慮時，很可能有A的元素包含於B的元素中的情形，我們說A是B的子集合（ Subset ），記爲$A\subset B$。又若另外一種情況$B\subset A$同時成立，則我們說A和B是相同的集合，$A=B$，若且唯若$A\subset B$和$B\subset A$

也就是說若且唯若兩個集合包含相同的元素，則兩集合是相等的。

下列兩種性質，全集合和空集合，具備此特性：

(a)任一集合A，必存在$\phi\subset A$。

(b)只要全集合存在，則任一集合A，$A\subset U$。

【例題1－1】 假定U是所有實數所成的集合，$A=\{n \mid x^2+2x-3=0\}$ $B=\{x \mid (x-2)(x^2+2x-3)=0\}$，$C=\{x \mid x=-3, 1, 2\}$ 則$A\subset B$，且$B=C$

其次，我們討論聯集運算（ union ），有兩種運算：加法（ addition ）及乘法（multiplication）是要運用到的。假設A和B是兩個集合，則我們定義C是A和B的聯集（ union ）（或稱A和B的和）如下

$$C=\{x \mid x\in A \ \ or \ \ x\in B\}(\ or\ both)$$

記爲$C=A\cup B$。在此C集合，同時包含了A或B，或兩者的元素。

又若D是A和B的交集（ intersection ）（有時亦稱A和B的乘積），定義如下

$$D=\{x \mid x\in A，及\, x\in B\}$$

記爲$D=A\cap B$，在此D集合包含了既屬於A又屬於B的元素。

最後，我們介紹一個集合A的餘集（ complement ）$\overline{A}$，它包含了所有不屬於A（但屬於全集合U）的元素，亦即$\overline{A}=\{x \mid x\notin A\}$

利用文氏圖（ Vann diagram ），可以更清楚明瞭集合的觀念，在圖 1－1 中，陰影的部份代表所考慮的範圍。

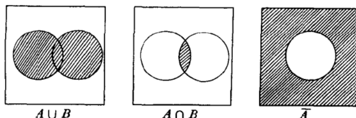


圖 1－1

【例題1－2】 假定$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，則我們可以知道

$\bar{A}=\{5,6,7,8,9,10\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

和$A\cap B=\{3,4\}$ 注意在集合中的元素（如$A\cup B$）

我們不重覆列舉，只列舉一次。

以上所述兩個集合之間的交集與聯集的觀念可以推廣到數個集合之間。因此，$A\cup B\cup C$和$A\cup(B\cup C)$，$(A\cup B)\cup C$是相同的。同理，$A\cap B\cap C$，$A\cap(B\cap C)$和$(A\cap B)\cap C$也是相同的。

下列是一些對等的集合，當我們回想若兩個集合元素相同時，兩集合是相同的，我們不難證明讀者應藉著文氏圖，自己證明。

(a) $A\cup B=B\cup A$ (b) $A\cap B=B\cap A$ (1－1)

(c) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (d) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cup C$

稱(a)及(b)爲交換律（Commutative laws），(c)及(d)爲結合律（associative laws）

下面列出一些常見而較重要的等式，是關於聯集，交集，及餘集的。每一等式均可以文氏圖證得。

(e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(f) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(g) $A\cap\phi=\phi$ (h) $A\cup\phi=A$ (1－2)

(i) $(\overline{A\cup B})=\bar{A}\cap\bar{B}$ (j) $(\overline{A\cap B})=\bar{A}\cup\bar{B}$

(k) $\bar{\bar{A}}=A$

其中(g)和(h)式中空集合中的作用，和0在加法和乘法中的作用是很類似的。

按照下述的定義，兩個（或更多個）的集合，經由轉換可以形成另一個集合

【定義】 設A及B爲兩個集合，A及B的卡氏積（Cartesian product），記爲$A\times B$，其所成集合爲$\{(a,b),a\in A,b\in B\}$，亦卽這些有序元素對（ordered pairs），前面一個元素是取自A，後面是取自B集合。

【例題1－3】 設$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$

則 $A\times B=\{(1,1),(1,2),\cdots\cdots(1,4),(2,1),\cdots\cdots(2,4),(3,1),\cdots\cdots(3,4)\}$

【附註】 一般情形下，$A\times B\neq B\times A$

上述的觀念可以引申更廣，例如$A_1\cdots\cdots A_n$是很多個集合，則$A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2\cdots\cdots,a_n),a_i\in A_i\}$，亦卽是由$n$個有序元素所組成的集合。

有一特殊的情形是，集合本身自乘的卡氏積（Cartesian product），如$A\times A$或$A\times A\times A$。在歐幾里得平面（Euclidean plane）中，$R\times R$，（R是所有實數所成的集合）歐幾里得三度空間爲$R\times R\times R$。

如果一個集合 A 中的元素是有限的數目，則我們稱 A 是有限集合。如果 A 集合是無限數目的元素組成，且可以與正整數有一對一的對應（one-to-one correspondence）則 A 為可數或可數無限（countably or denumerably infinite）（例如，所有有理數所成的集合，是可數無限）。最後，我們要討論不可數無限集合（nondenumberably infinite），這種集合包含無數個不可數的元素。例如，任二個實數，$b > a$，$A = x \mid a \leq x \leq b\}$，則為不可數無限集合。因為可以將每一實數表示在實數線上的一點，所以只要不退化（nondegenerate）的情形，任一區間，不可數無限集合所包含的元素，比可數無限集合要多。

雖然上面所介紹集合的觀念僅有一些而已，但是夠滿足我們的目的　詳細且確實的敘述機率的理論。

§1—3　非確定實驗（隨機實驗）的舉例 (Examples of Nondeterministic Experiments)

現在我們將討論隨機或非確定實驗（random or nondeterministic experiment），在此我們將列舉一些實例而不作很嚴密的定義。

E_1：投擲骰子，以觀測其出現之點數。

E_2：擲一枚銅板四次，以觀測其出現正面之次數。

E_3：擲一枚銅板四次，觀測連續出現正面或反面的次數。

E_4：觀測一生產線，計數於 24 小時間所生產之不良品個數。

E_5：觀測裝配飛機機翼時，所用的鉚釘不良品的個數。

E_6：將所生產的電燈炮插於插座，直至其燒壞，觀測其壽命。

E_7：於十件產品中含有 3 件不良品，一件件的選剔，直至所有的不良品均剔除掉，觀測其試驗次數。

E_8：欲生產十件良品，觀測其所生產的件數。

E_9：發射一火箭而於特定時間內，觀測其升空時的三個速度分量 V_x，V_y，V_z。

E_{10}：發射一火箭而於特定時間 t_1, t_2, t_3 ……，觀測其瞬時高度。

E_{11}：觀測一鋼樑的抗拉強度。

E_{12}：由一僅裝有黑球的袋中抽球，並記錄其顏色。

E_{13}：在一個指定的地點和時日，溫度記錄器連續 24 小時的讀數。

E_{14}：記錄 E_{13} 中的最高和最低溫度，x 和 y，

上述的各種試驗，有什麼共同的特徵呢？下列數項乃為隨機試驗共同的特性

§1—4　樣本空間 (The Sample Space)

【定義】　由一試驗之所有可能結果所組成的集合，稱為該試驗之樣本空間（Sample Sace），以 S 記之。（在前曾以 S 代表全集合，其義不同）。

為了說明樣本空間，我們以 1 － 3 所舉之例子，列述每一實驗E_i 的樣本空間S_i。

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$S_3 = \{$形如a_1, a_2, a_3, a_4之所有可能序列，此地$a_i = H$或T，端視第 i 次投擲出現正或反面而定$\}$

$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\cdots N\}$，$N$表示24小時的產量。

$S_5 = \{0, 1, 2, \cdots\cdots M\}$，$M$表示安裝的鉚釘數目。

$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}$

$S_7 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$S_8 = \{10, 11, 12, \cdots\cdots\}$

$S_9 = \{V_x, V_y, V_z \mid V_x, V_y, V_z$ 是實數$\}$

$S_{10} = \{h_1, \cdots\cdots h_n \mid h_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots\cdots n\}$

$S_{11} = \{T \mid T \geq 0\}$

$S_{12} = \{$黑球$\}$

$S_{13} = \{f \mid f$是可微函數且滿足$m \leq f(t) \leq M, \forall t\}$

此樣本空間在此所有考慮的例子中牽涉最廣，我們可具體假設在某一地區的溫度從未超過M或低於m，除此限制外，我們必須允許在任何圖形出現時有某種限制的可能性，大體上圖形將不會跳動（亦即，其為連續函數。另外，圖形是平穩的，亦即其為可微分函數，於是我們乃有如上所示之樣本空間）。

$S_{14} = \{(x, y) \mid m \leq x \leq y \leq M\}$

亦即S_{14}包含所有在二維x, y平面之三角形內或三角形上的點。（在本書中，我們將不再提到像S_{13}那樣複雜的樣本空間，但是如此的樣本空間是存在的，只是要研究它們，得要更高深的數學知識）

為了要描述一個實驗的樣本空間，我們必須要清楚分辨所觀測之事物，因此我們將說某個實驗的“一樣本空間”，而不說“有一樣本空間”，S_2，S_3的差別即在此。

而且實驗的結果也並不一定是數字，例如在E_3裏，每一結果是“正面”或“反面”，E_9和E_{10}之結果各為向量，而E_{13}則為一函數。

樣本空間結果的次數也是很重要的，有三種可能，第一種為有限的；第二種為可數無限，第三種為不可數無限，在前例中，S_1，S_2，S_3，S_4，S_5，S_7和S_{12}為有限的，S_8為可數無限的，S_6，S_9，S_{10}，S_{11}，S_{13}，S_{14}為不可數無限。

此時就數學上理想化的樣本空間，和實驗上可信賴的樣本空間之差異加以區別是很值得的。且考慮E_6和S_6，當我們詳盡記錄燈炮的壽命 t 時，顯然我們成了儀器精密度的“犧牲品”。假設我們有一測量儀器能測到小數第二位，如

16.43，由於這種限制，我們的樣本空間變成可數無限｛0.00，0.01，0.02……｝，又我們可以假設燈炮的壽命不會超過H小時，則我們就有了有限的樣本空間｛0.00，0.01……H｝，其個數有$(H/0.01)+1$，若H很大，則此值將非常的大，例如$H=100$。為了簡單和方便起見，我們假定所有$t\geq 0$均為可能結果，則我們與前面的S_6有相同的樣本空間。回想一下上面的敍述，有些樣本空間都被理想化，在以後所有的情況中，所考慮的樣本空間都是最簡單的，在多數的問題裏，對於樣本空間不會有太困難的選擇。

§1－5　事件　(Events)

另外的一個基本概念即事件，一個事件A（對應於與實驗ε有關的樣本空間S），簡單的說即可能結果的一個集合。就集合論的術語而言，一個事件即樣本空間S的一個部份集合。回想以前所討論過的，我們就知道S本身乃一事件，而ϕ也是。任何個別可能的結果，均可視為一事件。下面為事件的例子，A_i表與E_i有關的事件。

A_1：出現偶數，亦即$A_1=\{2, 4, 6\}$

A_2：$\{2\}$，出現兩個正面。

A_3：$\{HHHH, HHHT, HHTH, THHH\}$即正面多於反面。

A_4：$\{0\}$，沒有不良品。

A_5：$\{3, 4, \ldots\ldots M\}$，有兩個以上的壞鉚釘。

A_6：$\{t \mid t<3\}$，即燈炮壽命少於3小時。

A_{14}：$\{(x, y) \mid y=20+x\}$即最高與最低，差20度。

當S為有限或可數無限時，其每一個部份集合均可視為一事件〔如果S有n個元素，則其部份集合（即事件）的個數為2^n〕，然而當S為不可數無限時，則情形就不是這樣了！這時並非所有的部份集合均可被視為事件，某些“不被允許的”部份集合必須除外，其理由超出本書範圍，不加贅述，然而很幸運的，這些不被允許的集合在實際應用上並不真正的發生，因此可以忽略，以後我們所提到的事件時，顯然是可以考慮的事件。

現在我們可以用集合的合成法得到新的集合（事件）。

(a)若A，B為事件，若且唯若A或B發生，（或同時發生），則$A\cup B$為一事件。

(b)若A，B為事件，若且唯若A和B都發生，則$A\cap B$為一事件。

(c)若A為事件，若且唯若A不發生，則$\bar{A}$為一事件。

(d)若$A_1\ldots\ldots A_n$為有限個事件，若且唯若至少有一個A_i發生，則事件$\cup_{i=1}^{n}$發生。

(e)若$A_1\ldots\ldots A_n$為有限個事件，若且唯若所有的事件A_i發生，則事件$\cap_{i=1}^{n}$發生。

(f)若$A_1\ldots\ldots A^n$，……為可數無限個事件，若且唯若至少有一個A_i發生，

則事件$\cup_{i=1}^{\infty}$發生。

(g)若$A_1 \cdots\cdots A_n \cdots\cdots$爲可數無限個事件，若且唯若所有的事件$A_i$發生，則事件$\cap_{i=1}^{\infty}$發生。

(h)若S爲實驗Σ之樣本空間，重複兩次實驗Σ，則$S \times S$代表這兩次實驗之所有可能結果，亦即$(S_1, S_2) \in S \times S$代表第一次實驗得$S_1$，第二次實驗得$S_2$。

(i)推廣(h)的例子，若重複實驗n次，則$S \times S \cdots\cdots \times S = \{(s_1, s_2 \cdots\cdots s_n), s_i \in S, i=1, \cdots\cdots n\}$代表重複實驗$n$次時所有可能的結果，$S \times S \times \cdots\cdots \times S \times S$爲$n$次重複實驗$\varepsilon$的樣本空間。

【定義】 如果兩事件A和B不能同時發生，則稱其爲互斥事件（mutually exclusive），以$A \cap B = \phi$表之，亦即A與B之交集爲空集合。

【例1－4】 測驗一電子裝置的使用時間t，並記錄之，我們假定其樣本空間$S = \{t \mid t \geq 0\}$， 三事件A，B，C定義如下。

$A = \{t \mid t < 100\}$; $B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}$

$C = \{t \mid t > 150\}$

則

$A \cup B = \{t \mid t \leq 200\}$ $A \cap B = \{t \mid 50 \leq t < 100\}$

$B \cup C = \{t \mid t \geq 50\}$ $B \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\}$

$A \cap C = \phi$ $A \cup C = \{t \mid t < 100$ 或 $t > 150\}$

$\overline{A} = \{t \mid t \geq 100\}$ $\overline{C} = \{t \mid t \leq 150\}$

如上一節所討論的，實驗的一項基本特性，是當我們進行實驗時會得到什麼的結果。換句話說，若A是與實驗有關的一個事件，則我們無法肯定的說A是否會發生，因此對事件A給予一數值，表示事件A發生的可能性，這是很重要的。這使我們進入機率的領域。

§ 1－6 相對次數 (Relative Frequency)

爲了探求上面的問題的解答，我們考慮下面的步驟，假定我們重複n次的實驗之，且令A和B爲與實驗之有關的事件。n_A，n_B分別爲在n次實驗中A及B發生的次數。

【定義】 $f_A = n_A / n$稱爲重複n次實驗Σ中；事件A的相對次數（Relative Frequeney），則f_A有下列的性質，且很容易即可證得。

(a) $0 \leq f_A \leq 1$

(b) $f_A = 1$若且唯若n次重複實驗中，每次都是發生A事件。

(c) $f_A = 0$若且唯若n次重複實驗中，事件A從未發生過。

(d)若A，B互斥且若$f_{A \cup B}$代表$A \cup B$之相對次數，則$f_{A \cup B} = f_A + f_B$

(e)依據n次重複試驗且被視爲n的函數的f_A，當$n \to \infty$時，以機率的意義而言，可以說是收斂到$P(A)$。

【附註】　上面的性質(e)在此有些含糊，在以後的章節中（見12－2）節，對此觀念將解釋更明確，目前簡單的說性質(e)的直覺觀念，亦即觀察次數愈多，則相對次數愈來愈"穩定"，趨近於某一數值，但這和數學上收斂的觀念不同，事實上，在此所述的，並不是數學上的結論，只不過是個經驗的事實。

雖然我們可能從未曾查驗過，但對於這種穩定之現象都有直覺上的體驗，要查驗這些要費相當的長時間和耐力，因爲它需要多次的重複實驗，然而我們可能會是如下例所述的無辜的觀察者。

【例題1－5】　假定我們站在人行道上，且仔細觀察兩鄰近的水泥柱，若天下起雨來了，且我們能夠分別每點的雨滴，並注視其落在那一根水泥柱子，我們一直觀察，並注意其落點。令$x_i=1$，代表雨點落在某一根柱子。

$x_i=0$代表落在其他柱子，我們可能得到序列如1，1，0，1，0，0，0，1，0，0，1，很顯然我們不能知道某一雨點會落在那一根柱子上，如果我們計算事件$A=\{$雨點落在第一根柱子$\}$之相對次數，則其結果爲1，1，2／3，3／4，3／5，3／6，3／7，4／8，4／9，4／10，5／11，……這序列顯示出有相當程度的變動，尤其是在剛開始時，很顯然的，若這樣的實驗繼續無限的進行，則此相對次數的頻率將接近1／2，因爲我們有相當足夠的理由相信一段時間以後，兩根柱子將一樣的潮濕。

對於相數次數的穩定性的觀念，仍然是很直覺的，以後我們將再討論，此性質是說當實驗進行了很多次，事件A發生的相對次數的變動將隨實驗次數的增加而減少，此性質常被稱爲統計規律（Statistical regularity）。

我們對於"實驗"的定義，也有些含糊，什麼時候一個實驗的步驟能用非確定模型來研究呢！我們曾經提過一個實驗必須在不變的條件下重複進行，我們現在再加一項限制即當重複實驗時，將出現統計規律，以後我們將討論一個定理。（稱爲大數法則Law of Large Number），它告訴我們統計規律（statistical regularity）乃是第一項要求（重複性）的結果。

§1－7　機率的基本概念 (Basic Notions of Probability)

再讓我們回想前面的問題，對每一事件A，給予一數值，代表實驗進行時，事件A發生的可能性，我們按下面步驟討論，我們重複試驗多次，且計算其相對次數f_A，而利用此數值。當我們回想到f_A的特性時，很顯然的此數值對於事件A發生的可能性有很明確的指示。而若試驗次數愈多，則相對次數f_A漸漸穩定趨近於一數P，然而却有兩項不太合理的地方：(a)我們知道P之前，n要多大很不明顯，是1000？2000？或是10,000呢。(b)如果我們已完全知道了實驗，且已知事件A，則我們要求的數據不該依實驗者或是憑運氣而定。（例如，對均勻的硬幣，連投十次，可能得到九次正面，一次反面，則事件$A=\{$出現正面$\}$的相對次數爲9／10，但很可能在下一次的投擲中，其結果剛好相反），我們

所要的是不必由實驗，即可得到這數值。當然對於我們所要求的數值要有意義起見，任何連續的實驗應得到一很接近於此要求數值的相對次數，尤其是重複相當多次的時候。

【定義】 令 ε 爲一實驗，S 爲與 ε 對應的樣本空間，事件 A 的機率 $P(A)$，滿足下列特性。

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$ (1－3)

(3)若 A，B 爲互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(4)若 A_1，A_2，……A_n……爲兩兩互斥，則

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots\cdots + P(A_n) + \cdots$$

由性質(3)，我們立即得到：對所有的 n

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

然而性質(3)並不如此，必須在理想化的樣本空間時才會得到這結果。

上列性質的選擇，很顯然是由相對次數的性質所產生的，又前面所提到的統計規律，以後將與機率的此種定義相連接，我們暫且如此說：若 f_A 是由多次試驗得到的，則 $P(A)$ 將會和 f_A 很接近，這結果使我們可以由 $P(A)$ 測量 A 發生的可能性。

目前爲止，我們仍不知如何求 $P(A)$，但我們已列出 $P(A)$的一些性質。讀者在學會如何計算 $P(A)$ 之前要有耐心（一直到下一章），在討論此問題之前，且讓我們敍述和證明 $P(A)$ 的結果，這些結果是由上面的性質而來，而不視於我們如何去求 $P(A)$。

【定理1－1】 如果 ϕ 爲空集合，則 $P(\phi) = 0$

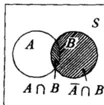
【證明】 對任何事件 A，$A = A \cup \phi$，因 A，ϕ 互爲互斥。因此由性質(3)，$P(A) = P(A \cup \phi) + P(\phi) = P(A) + P(\phi)$，故 $P(\phi) = 0$。

【附註】 以後，我們將知道定理1－1的逆敍述並不成立，亦即若 $P(A) = 0$，則我們不能說 $A = \phi$，因爲有些情況，事件"會"發生，但其機率爲0。

【定理1－2】 若 $\bar{A}$ 爲 A 之餘集合，則 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (1－4)

【證明】 由 $S = A \cup \bar{A}$，由特性(2)，(3)，$1 = P(A) + P(\bar{A})$

【附註】 此定理非常有用，因爲我們要求 $P(A)$ 時，我們可以求 $P(\bar{A})$ 而後以 $1 - P(\bar{A})$，即得 $P(A)$，我們將會發現求 $P(\bar{A})$ 比 $P(A)$ 簡單多。



【定理1－3】 若 A，B 是任意兩事件，則

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

【證明】 證明此定理的觀念，在於分解 $A \cup B$ 及 B，

使爲互斥的事件，然後利用性質(3)（是圖1－2）

因爲　$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$

$B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

因此　$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

將上面第二式代入第一式，則得到

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

然後得到所要的結果

【附註】　此定理很明顯是性質(3)的推廣，因爲如果$A \cap B = \phi$我們由本定理得到性質(3)的敍述。

【定理1－4】　若A，B，C爲任意三個事件，則

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad (1\text{-}6)$$

【證明】　將$(A \cup B \cup C)$視爲$(A \cup B) \cup C$，由上面的定理卽得，證明細節讀者自行導證。

【附註】　此定理有明顯的推廣，令A_1，$A_2 \cdots\cdots A_k$爲k個任意事件，則

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{k} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j\ \ r=3}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \cdots\cdots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_k) \quad (1-7)$$

此結果可由數學歸納法得到。

【定理1－5】　如果$A \subset B$，則$P(A) \leq P(B)$

【證明】　因$B = A \cup (B \cap \overline{A})$，因此$P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geq P(A)$。〔因爲$P(B \cap \overline{A}) \geq 0$，且$A$及$(B \cap \overline{A})$爲互斥〕

§1－8　重點提要　(Several Remarks)

(a)在此應注意遵守一句話。從前述，我們可得到一個推論（不正確地）：當我們選用某一機率模式以描述某種現象時，並不須其可確定性的關係。事實上亦如此。例如歐姆定律$I = E / R$在某種條件下是成立的，所不同的只是如何解釋罷了。如果我們不把上式解釋作在某一定E與R值下決定I的關係式，而視E與R是在某不可預測的隨機空間內變動，則I亦以某種隨機行爲變動。這個意思是說，當吾人選取一描述電流的機率模式時，我們將E與R的機率視爲在某不可預測的行爲下變動，而且其行爲只可以機率來描述，因此因爲將E與R的機率視爲確定值是有意義的，故I的機率亦爲確定值亦是有意義的。

(b)應該取用確定模式或機率模式有時候是很難作決定的，因爲這要決定於測

量技術的複雜性及其正確性，例如，正確的度量不易求得時，某種量的重複讀數亦將不同，無疑地，在此情況之下，機率模式較適合。

(c)在某種情況之下，我們必須對實驗結果作某些假設，然後才能計算基本機率。假設的選擇取決於實驗而得的物理性質（如某種對稱性），實證結果，有時候則只是個人就類似問題的經驗而作決定。相對頻率f_A在討論$P(A)$的數值分配時是很重要的，而關於$P(A)$所做的假設必須滿足定義1－3之基本定理(1)至4)。

(d)建立機率理論的基本觀念時，我們將以類似性質的力學觀念作參考。力學裡我們以$m(B)$表物體B的質量，就B的行為及其與其他物體的關係作各種運算。可得各種結論，有很多關係牽涉到$m(B)$，我們作此運算時確曾對$m(B)$取其近似值，但不影響質量觀念的效用。同理，設事件A是某實驗樣本空間之事件，$P(A)$為A的機率，且滿足基本定理，真正計算$P(A)$時，我們確曾作某些假設或根據實證結果而取其近似值。

(e)假設$P(A)$值存在並假設某種性質可以數字表示是很重要的。由此假設而導出的各種結果（理論）的正確性與如何求得$P(A)$值是無關的，此理極明。例如設$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，應用此關係試以求$P(A\cup B)$時，應先知道$P(A)$與$P(B)$。在某種情形之下，我們可以作某些假設以求得$P(A)$與$P(B)$，如果這些假設是正確的，則我們可以應用實驗從真正的數據求得$P(A)$之近似值，此時，相對頻率f_A扮演者一個重要的角色，此估計$P(A)$。

但是，應切記的一點是，f_A與$P(A)$並不相同，f_A只是用在估計$P(A)$，當我們用$P(A)$時，我們只是用一個假設值。如果f_A與$P(A)$相同，則我們必須確知，某實驗近似值取代了假設值。近似值的好壞並不影響模式的邏輯結構。雖然建立模式的時候曾考慮了所要描述的現象，但是當我們進到模式的領域之後，我們就可以置身於所描述的現象之外（至少是暫時的）。



1－1 設若全集合（Universal set 由1到10之自然數所組成）
$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，試舉出下列各集合之元素。
(a)$\overline{A}\cap B$，(b)$\overline{A}\cup B$，(c)$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，(d)$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$，(e)$\overline{\overline{A}\cap(B\cup C)}$

1－2 設若全集合$U=\{x\mid 0\le x\le 2\}$定義集合A，B如下：$A=\{x\mid \frac{1}{2}<x\le 1\}$，$B=\{x\mid \frac{1}{4}\le x<\frac{3}{2}\}$試描述下列諸集合
(a)$\overline{A\cup\overline{B}}$，(b)$A\cup\overline{B}$，(c)$\overline{A\cap\overline{B}}$，(d)$\overline{A}\cap B$，

1－3 下列關係式何者為真？
(a)$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

(b) $(A \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cup B$

(c) $\overline{A} \cap B = A \cup B$ ，　(d) $(\overline{A \cup B}) \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(e) $(A \cap B) \cap (\overline{B} \cap C) = \phi$

1－4　假設一全集合包含所有點 (x, y)，x，y 皆爲整數且位於由線 $x=0$，$y=0$，$x=6$，$y=6$ 所圍成正方形之邊界或內部，舉出下列集合之元素。

(a) $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 6\}$，(b) $B=\{(x, y) \mid y \leq x^2\}$

(c) $C=\{(x, y) \mid x \leq y^2\}$　，　(d) $B \cap C$

(e) $(B \cup A) \cap \overline{C}$　$y=x^2$

1－5　利用文氏圖以建立下列的關係

(a) $A \subset B$，且 $B \subset C$ 得 $A \subset C$　　(b) $A \subset B$ 得 $A=A \cap B$

(c) $A \subset B$ 得 $\overline{B} \subset \overline{A}$　　(d) $A \subset B$ 得 $A \cup C \subset B \cup C$

(e) $A \cap B=\phi$ 且 $C \subset A$ 得 $B \cap C=\phi$

1－6　由生產線上製造出來的良品爲 N (nondefective) 不良品爲 D (defective)，查驗這些物品，其方式如下：直至連續有兩個壞的物品出現，或四個物品檢查完畢，但不論何者先發生後，此檢驗就停止，試描述此實驗之樣本空間。

1－7　(a)一個箱子有 N 個燈泡，其中 r 個 ($v<N$) 燈泡的保險絲已斷，現逐次測試這些燈泡，直至找到一個壞的燈泡，試描述此實驗的樣本空間

(b)設若上述之燈泡是逐次測試，直至找到所有壞的燈泡爲止，試描述此實驗的樣本空間。

1－8　四物品 a，b，c，d 設若所列之次序代表此實驗出現之樣本定義事件，A，B 如下：$A=\{a$ 在首位$\}$，$B=\{b$ 在次位$\}$，

(a)列出此樣本空間的所有元素。

(b)列出事件 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 的所有元素。

1－9　一堆物品，其重分別是 5，10，15，……，50 磅，假定每一重量的物品至少有兩件以上。從這堆物品中選取兩件。令 X 表第一件之重，Y 表第二件之重，於是序對 (X, Y) 表實驗的一結果，利用 $X-Y$ 平面指示樣本空間及下列事件：

(a) $\{X=Y\}$　　(b) $\{Y>X\}$　　(c)第二件是第一件之兩倍重

(d)第一件比第二件輕 10 磅　　(e)兩物品之平均重少於 30 磅

1－10　在 24 小時期間的某一時刻 X，開關撥到 " ON " 的位置，隨後在某時刻 Y (仍在 24 小時間內)，開關撥到 " OFF " 的位置，以時間的起點爲原點，(X, Y) 數對表示此實驗的樣本，且 X 和 Y 在時間軸上以小時計。

(a)試描述樣本空間。

(b)試描述和在 $X-Y$ 平面上繪出下列事件：

(1)此線路有一小時或少於一小時是通的。

(2)此線路在時間 z 是通的，而 z 是在此24小時週期內的一瞬間。

(3) t_1 之前此線路是通的，t_2 之後此線路不通（t_1 和 t_2 是在此24小時週期內的一瞬間且 $t_1 < t_2$ ）。

(4)此線路通的時間是不通時間的兩倍。

1－11 一實驗中有 A，B，C 三種事件，以集合符號表出下列口頭敍述

(a)至少有一事件發生。　(b)僅有一事件發生。

(c)僅有兩事件發生。　(d)不多於兩事件同時發生。

1－12 證明下列定理：若 A，B，C 表三事件則

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

1－13 (a)證明 A_1，A_2 爲任何二事件，則 $P(A_1\cup A_2)\leq P(A_1)+P(A_2)$

(b)證明 $A_1\cdots\cdots A_n$ 爲任何 n 事件，則 $P(A_1\cup A_2\cdots\cdots\cup A_n)\leq P(A_1)+\cdots\cdots+P(A_n)$

1－14 定理 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 表示兩事件 A，B 至少有一事件發生之概率，下列敍述爲此兩事件中僅有 A 或 B 發生之概率爲 $[P(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ 試證之。

1－15 某一型式的電動馬達，其損壞的原因是由於(1)軸承被卡住，(2)繞線被燒毀，(3)電刷磨損，設若軸承卡住的概率爲繞線燒毀的兩倍，而繞線燒毀的概率是電刷磨損的四倍，試問每一種機械現象所造成的損壞概率爲何？

1－16 A，B 兩事件 $P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(A\cap B)=z$，以 x，y，z 表出下列概率：

(a) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$，(b) $P(\overline{A}\cap B)$，(c) $P(\overline{A}\cup B)$，(d) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

1－17 若有 A，B，C 三事件且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(A\cap B)=P(C\cap B)=0$，$P(A\cap C)=\frac{1}{8}$，計算三事件中至少有一發生之概率爲何？

1－18 一裝置包含兩汽鍋和一引擎，事件 A 代表引擎在好的狀況，而事件 B_k（$k=1$，2）代表第 k 個汽鍋在好的狀況，事件 C 表示此裝置可以工作，設若這裝置只要引擎和至少一汽鍋在好的狀況，即爲可工作的，試以 A 和 $B_k s$ 來表示 C 和 $\overline{C}$。

1－19 型式Ⅰ和型式Ⅱ，爲一機械的兩部分，型式Ⅰ有兩個，型式Ⅱ有三個，定義事件 A_k：$k=1$，2 和 B_j，$j=1$，2，3 如下：

A_k：第 k 個型式Ⅰ有效用，B_j：第 j 個型式Ⅱ有效用。

其次以C表示此機械可工作的事件，但此機械可工作的條件：
是至少有一個型式Ⅰ和至少有二個型式Ⅱ有效用，試以A_k's 和B_j's
來表示事件C。



1－1

【解】 (a) $\bar{A} \cap B = \{ 5 \}$

(b) $\bar{A} \cup B = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

(c) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

(d) $\overline{A \cap (\overline{B \cap C})} = \{ 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

(e) $\overline{A \cap (B \cup C)} = \{ 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

1－2

【解】 (a) $\overline{A \cup B} = \{ x \mid 0 \le x \frac{1}{4} \} \cup \{ x \mid \frac{3}{2} \le x \le 2 \}$

(b) $A \cup \bar{B} = \{ x \mid 0 \le x < \frac{1}{4} \} \cup \{ x \mid \frac{1}{2} < x \le 1 \} \cup$

$\{ x \mid \frac{3}{2} \le x \le 2 \}$

(c) $\overline{A \cap B} = \{ x \mid 0 \le x \le \frac{1}{2} \} \cup \{ x \mid 1 < x \le 2 \}$

(d) $\bar{A} \cap B = \{ x \mid \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \} \cup \{ x \mid 1 < x < \frac{3}{2} \}$

1－3

【解】 (a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ 真

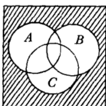
(b) $(A \cup B) = (A \cap \bar{B}) \cup B$ 真

(c) $\bar{A} \cap B = A \cup B$ 僞

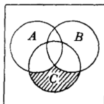
(d) $(\overline{A \cup B}) \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$　僞

(e) $(A \cap B) \cap (\bar{B} \cap C)\ \phi$ 真　$(\because B \cap \bar{B} = \phi)$

(d)可由文氏圖來判斷。



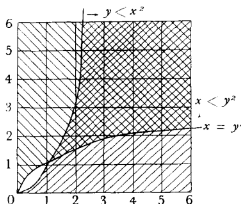
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



$(\overline{A \cup B}) \cap C$

1−4

【解】 由圖知



(a) $A = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 6\}$
$= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}$

(b) $B = \{(x, y) \mid y \leq x^2\}$
$= \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1) \sim (3, 6), (4, 1) \sim (4, 6), (5, 1) \sim (5, 6), (6, 1) \sim (6, 6)\}$

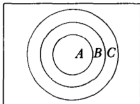
(c) $C = \{(x, y) \mid x \leq y^2\}$
$= \{(0, 0) \sim (0, 6), (1, 1) \sim (1, 6), (2, 2) \sim (2, 6), (3, 2) \sim (3, 6), (4, 2) \sim (4, 6), (5, 3) \sim (5, 6), (6, 3) \sim (6, 6)\}$

(d) $B \cap C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2) \sim (3, 6), (4, 2) \sim (4, 6), (5, 3) \sim (5, 6), (6, 3) \sim (6, 6)\}$

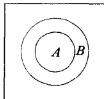
(e) $\therefore (B \cup A) \cap \overline{C} = \overline{C} = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (6, 0), (6, 1), (6, 2)\}$

1−5

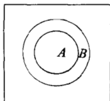
【解】 (a)由 $A \subset B$ 和 $B \subset C$ 得 $A \subset C$。



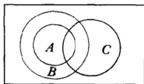
(b) $A \subset B$ 得 $A = A \cap B$。



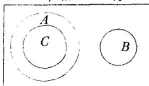
(c) $A \subset B$ 得 $\overline{B} \subset \overline{A}$。



(d) $A \subset B$ 得 $A \cup C \subset B \cup C$。



(e) $A\cap B=\phi$ 和 $C\subset A$ 得 $B\cap C=\phi$



1－6

【解】 樣本空間

$S=\{(D,D),(D,N,D,N),(N,D,D),(N,N,N,N),(N,N,N,D),(N,N,D,D),(N,N,D,N),(N,D,N,D),(D,N,N,N),(D,N,N,D),(D,N,D,D),(N,D,N,N)\}$

1－7

【解】 (a) $N\rightarrow$ 燈泡之總數，$r\rightarrow$ 壞的燈泡之總數，$N-r$ 好的燈泡之總數，壞的的燈泡標爲 D，好的燈泡標爲 N'，

$S=\{(D),(N',D),(N',N',D),(N',N',N',D)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\underbrace{N',N',\cdots\cdots\cdots,N'}_{N-r\text{ 個}N},D\}$

(b) 此樣本空間之樣本，其元素最多爲 N，最少爲 r，故以樣本中之元素個數代表一切相同元素個數之樣本，但其最後一元素必須爲 D。

$S=\{(a_1,\cdots\cdots,a_n,D)\mid a_1,\cdots\cdots,a_n$ 中有 $r-1$ 個爲 $D\}$

1－8

【解】 (a) $S=\{(a,b,c,d),(a,c,b,d),(a,b,d,c),(a,c,d,b),(a,d,b,c),(a,d,c,b),(b,c,a,d),(b,a,c,d),(b,a,d,c),(b,c,d,a),(b,d,a,c),(b,d,c,a),(c,a,b,d),(c,a,d,b),(c,b,a,d),(c,b,d,a),(c,d,a,b),(c,d,b,a),(d,a,b,c),(d,a,c,b),(d,b,a,c),(d,b,c,a),(d,c,a,b),(d,c,b,a)\}$

共計 $4!=4\times3\times2=24$ 個元素

(b) $A\cap B=\{(a,b,c,d),(a,b,d,c)\}$

$A\cup B=\{(a,b,c,d),(a,c,b,d),(a,b,d,c),(a,c,b,d),(a,d,b,c),(a,d,c,b),(c,b,a,d),(c,b,d,a),(d,b,a,c),(d,b,c,a)\}$

$\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

P 代表自一事件映至此事件元素個數的函數，而

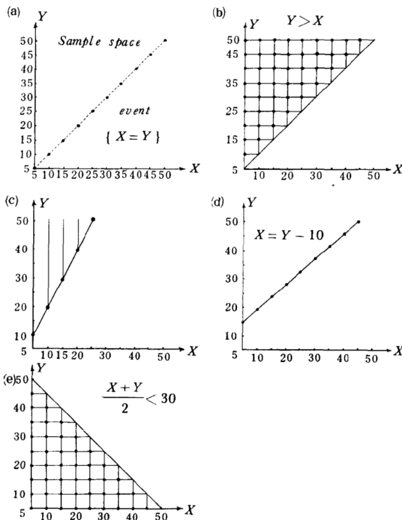
$P(A)=P(B)=3!=6$

$\therefore P(A\cup B)=6+6-2=10$

故知有 10 個元素。

1－9

【解】



1－10

【解】 (a) $S=\{(X, Y) \mid 0 \leq X \leq 24,\ 0 \leq Y \leq 24$ 且 $X<Y\}$

(b)(1) $A=\{(X, Y) \mid Y-X \leq 1\}$

(2) $B=\{(X, Y) \mid X \leq z<Y\}$

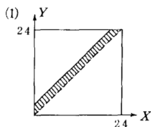
(3) $C=\{(X, Y) \mid 0<X \leq t_1<t_2<Y \leq 24\}$

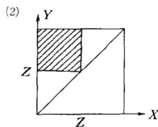
(4)此線路通的時間爲 $Y-X$，不通的時間爲 $X+(24-Y)$

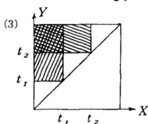
$\therefore Y-X=2[X+(24-Y)]=2X+48-2Y$

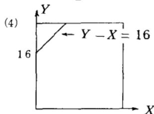
$\therefore 3Y-3X=48$，　　$\therefore Y-X=16$

$\therefore D=\{(X, Y) \mid Y-X=16\}$









1－11

【解】 (a) $A \cup B \cup C$

(b) $[A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})] \cup [B \cap (\overline{A} \cap \overline{C})] \cup [C \cap (\overline{A} \cap \overline{B})]$

$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$

(c) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$

(d)多於兩事件發生爲 $A \cap B \cap C$，

$\therefore \overline{A \cap B \cap C}$ 表示不多於兩事件發生之情形。

$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cap (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

1－12

【解】 利用 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$

$\because P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(C \cap B \cap C)$

1－13

【解】 (a) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$　　$\because P(A_1 \cap A_2) \geq 0$

(b)以數學歸納法證明：

(1)當 $n=1$ 時，$P(A_1)=P(A_1)$ 爲眞

(2)假使 $n=k$ 時，此關係式成立

$\therefore P(A_1\cup A_2\cdots\cdots\cup A_k)\le P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_k)$

若 $n=k+1$ 時亦成立則此式成立

$\because P(A_1\cup\cdots\cup A_k\cup A_{k+1})=P[(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)\cup A_{k+1}]$
$=P(A_1\cup\cdots\cdots A_k)+P(A_{k+1})-P[(A_1\cup A_2\cdots\cdots\cup A_k)\cap A_{k+1}]\le P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)+P(A_{k+1})$

$\because P[(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)\cap A_{k+1}]\ge 0$

由(2)式知 $P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_k)\le P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)$

$\therefore P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_{k+1})\le P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{k+1})$

故知 $P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)\le P(A_1)+\cdots+P(A_n)$ 成立，只要 n 爲整數且 $n\ge 1$

1－14

【解】 $[P(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})]=P(A\cap\bar{B})+P(B\cap\bar{A})-P[A\cap\bar{B}\cap\bar{B}\cap\bar{A}]$ ……………………(1)

此式末項爲零，且由 $A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$

$B=(B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})$

$\therefore P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$，

$P(B\cap\bar{A})=P(B)-P(A\cap B)$

故(1)式 $=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

1－15

【解】 設事件 A 爲軸承被卡住，事件 B 爲燒線燒壞，C 爲電刷磨損。則 $P(A)=2P(B)$，$P(B)=4P(C)$

$\because P(A)+P(B)+P(C)=1$，　$\therefore 13P(C)=1$

$\therefore P(C)=\frac{1}{13}$，　$\therefore P(A)=\frac{8}{13}$，　$P(B)=\frac{4}{13}$

1－16

【解】 (a) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-z$

(b) $P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=y-z$

(c) $P(\bar{A}\cup B)=1-P(\overline{\bar{A}\cup B})=1-P(A\cap\bar{B})$

$=1-[P(A)-P(A\cap B)]$

$=1-P(A)+P(A\cap B)=1-x+z$

(d) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-x-y+z$

1－17

【解】 至少有一事件發生之機率爲 $P(A\cup B\cup C)$

$$\because P(A\cup B\cup C)=\overset{\frac{1}{4}}{P(A)}+\overset{\frac{1}{4}}{P(B)}+\overset{\frac{1}{4}}{P(C)}-P(A\cap B)$$
$$-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

$\because P(A\cap B\cap C)=0$，此因$A\cap B=\phi$，$C\cap B=\phi$，

$\therefore A\cap B\cap C=\phi$

1－18

【解】 $C=A\cap(B_1\cup B_2)$，$B_1\cup B_2$表示至少有一汽鍋在好的狀況。$\overline{C}=\overline{A\cap(B_1\cup B_2)}=[\overline{A}\cup(\overline{B_1\cup B_2})]=\overline{A}\cup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})$ 此式可解釋爲引擎壞了，或兩汽鍋同時壞了，此裝置不能操作。

1－19

【解】 $C=(A_1\cup A_2)\cap[(B_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_3)\cup(B_2\cap B_3)]$ $(A_1\cup A_2)$表至少有一型式 I 有效用。

然而$[(B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap B_3)\cup(B_1\cap B_2)]$表示至少有二個型式 II 有效用。

第二章　有限樣本空間

§2－1　有限樣本空間 (Finite Sample Space)

這一章我們將討論一些樣本空間由有限個元素所組成的實驗，假設為S，可證為$S=\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_k\}$，如果我們提及1－4節的例子，我們會發覺$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$，$S_5$，$S_7$及$S_{12}$都是有限的。

為了描述此模型中$P(A)$的特性，我們將先只考慮一個結果（Single outcome）的事件，例如$A=\{a_i\}$。

對於每一基本事件$\{a_i\}$，我們設定一數p_i，稱為$\{a_i\}$的機率，且滿足下列條件：

(a) $p_i \geq 0$，$i=1, 2, \cdots\cdots k$，(b) $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k=1$

（因為$\{a_i\}$是一事件，因此這些條件必須滿足如例1－3所要求的，很容易查驗事實是如此）

其次，假定一事件A包含r個結果，$1 \leq r \leq k$，如

$A=\{a_{j1}, a_{j2}, \cdots\cdots a_{jr}\}$

此處j_1，j_2，……j_r代表由1，2，3……k中取出的任何r個指標，由方程式（1－3）性質(4)中，所以

$$P(A)=p_{j1}+p_{j2}+p_{j3}+\cdots\cdots+p_{j2} \qquad (2-1)$$

總之，在上面的條件(a)，(b)限制之下，$\{a_i\}$的機率p_i對任何事件$A\subset S$而言，都唯一決定$P(A)$之值，此處的$P(A)$由方程式（2－1）中得到。

為了分別求得個別的p_i，對於各個結果，必須有某些的假定，

【例題2－1】 假設一實驗的結果只有三個，a_1，a_2，a_3，且a_1發生的可能是a_2的兩倍，而a_2又為a_3的兩倍，因此

$p_1=2p_2$，$p_2=2p_3$，但$p_1+p_2+p_3=1$，故$4p_3+2p_3+p_3=1$

所以　$p_3=\frac{1}{7}$，$p_2=\frac{2}{7}$，$p_1=\frac{4}{7}$

§2－2　相等可能的結果 (Equally Likely Outcomes)

對有限樣本空間的最常用的假定是所有的結果，其發生的可能性的相等（equally likely）。此項假設，沒有理由被視為當然的，必須小心的加以證明。。有些實驗，可以如此假設，但也有很多情況，這項假設會導致錯誤的結果，例如假定清晨1點到2點，打進總機交換的電話次數，和清晨5點到6點打進的電話次數為相等可能，這是不太合理的。

如果所有k個結果都是相等可能，則$p_i=\frac{1}{k}$，因為$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k=$

1，所以變成$kp_i=1$，故$p_i=\frac{1}{k}$。由此結果，則對任何事件A包含r個結果，我們得到$P(A)=\frac{r}{k}$，亦即

$$P(A)=\frac{A\text{可能發生的方式個數}}{\text{實驗}\varepsilon\text{的所有可能發生的方式個數}}$$

必須注意，上式$P(A)$的假定是所有的結果均相等可能，而且只能在此假定下才能適用，它不是機率的定義。

【例題2－2】 投擲一骰子，並假定所有的結果都相等可能，事件A發生若且唯若出現比4大的數目，亦即$A=\{5, 6\}$因而$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$。

【例題2－3】 投擲一均勻的硬幣兩次，且定義事件A：{出現一次正面}，我們可以如下的分析題目，以求$P(A)$：樣本空間爲$S=\{0, 1, 2\}$，其中每一結果代表出現正面的次數，因此$P(A)=\frac{1}{3}$，如果這樣算，那就錯了！因爲以上所考慮的樣本空間中，其所有的結果並不是相等可能，爲了利用上面的方法，必須考慮樣本空間$S^1=\{HH, HT, TH, TT\}$，在此所有的結果均爲相等可能，因此我們才能得到正確的答案$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。我們也可如下的考慮樣本空間$S$：出現0，2的結果爲相等可能，但1出現的機率爲它們的兩倍，所以$P(A)=\frac{1}{2}$。

此例說明了兩點；第一，在利用上面程序分析之前，必先假設所有的結果爲相等可能。第二，經由適當的選擇樣本空間，可以使問題的結果簡化爲相等可能，通常我們常是如此做的，使問題簡化，這一點在下面的例子將會提及。

往往實驗進行的方式會決定其結果是否爲相等可能。譬如：我們從一含有三個不同大小尺寸的螺釘的盒子裏，選出一個螺釘，如果當手伸進去第一次摸到的螺釘，就是所選取的，則其中最大的一個螺釘被選中的可能性爲最大，然而如果將其標本以號碼，做成標簽，然後從標簽中選取一個，則我們相信每一個螺釘被選中的機率都是相同的，因此爲了使我們所假設的模式有均等可能的結果，則這將成爲一件很不簡單的事。

在我們所考慮過的例子，和下面的例子中，我們所要涉及的是一堆物品中，隨機抽取一件或是多件的物品，更詳細的說，如果我們有N件物品，a_1，$a_2\cdots\cdots a_n$。

(a)由此N件物品中，隨機抽取一件，意即每件物品都有相等可能的機會被選取，故

$$\text{選取}a_i\text{的機率}=\frac{1}{N},\ i=1, 2\cdots\cdots N$$

(b)從N件物品中，隨機抽取二件的意思，即每對物品（不管其次序如何）被選取的機率均相等，如從（a_1，a_2，a_3，a_4）中任選兩物，則取a_1，a_2和取a_3，a_4有相等的可能，但問題是到底有多少不同的對呢！假定有k對，每一對的機率就是$1/k$，不久我們就會知道如何求k。

(c)由此N件物品中，隨機選取n件（$n \leq N$）的意思，即每一n一元組，a_{i1}，a_{i2}……a_{in}，都有相等機會被選取。

§2－3 計數示法 (Methods of Enumeration)

在此爲了學習如何計算，我們必須談論到另外的題目。再考慮$P(A)=r/k$，其中k爲ε能發生的方式之個數，r爲A能發生的方式之個數。以往的例子，計算r和k沒有什麼困難，但我們需要考慮複雜一些的情況，以爲有系統的計算或計數程序之用。

【例題**2－4**】 100件物品中，不良品20件，良品80件，隨機抽取10件，每次抽取都不放回，求恰有一半爲不良品的機率爲何？

爲了分析這個問題，我們要考慮樣本空間S，S的每一元素包含10件可能物品（i_1，i_2……i_{10}），這樣的結果有多少呢？而在這些結果中，合乎條件即有一半爲不良品的又有多少呢？要解決這個考慮的難題，我們得先回答上面的問題，許多類似的難題都會產生相似的問題，下面的幾節中將介紹一些有系統的計數程序。

A．乘法原理（Multiplication principle）

假定手續1有幾種方法，手續2有n_2種，而且手續1的每種方法，伴隨的手續2有其n_2種方法，亦即手續1後，接著手續2，其組合的程序共有$n_1 \times n_2$種方法。

爲了使此原理（乘法原理）能更清楚起見，我們考慮一點P及L_1，L_2兩條線，手續1爲從P到L_1，手續2從L_1到L_2。

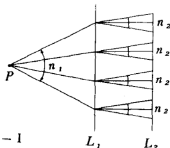


圖2－1

【附註】 此原理也可以推廣，如果有k個手續，而第i個有n_i種方法。$i=1$，2，……k，則手續1，接著手續2……，到手續n，其方法共有n_1，n_2……n_k種。

【例題**2－5**】 有一產品必須經過三個檢查站，每一檢查站檢查一種特性，然後評定等級，若第一站有三種等級，最後兩站有4種等級，則有$3\times4\times4=48$種方法標示產品的等級。

B．加法原理 （Additional principle）

假設手續1有n_1種方法，手續2有n_2種方法，且假定不可能同時進行1較2，則進行1或2的方法有n_1+n_2種，圖2－2說明加法原理。

【附註】 此原理也可加以推廣，如果有k個手續，第i個有n_i種方法，且若不可能有任何兩種手續能同時發生，則手續1或2或3……或k的方法有n_1+n_2 $n_2+\cdots\cdots+n_k$種。

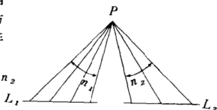


圖2－2

【例題2－6】 假設我們計劃去旅行，而且決定搭乘火車或是巴士。若有3種巴士路線，2種火車路線，則旅行的可能不同路線有（3＋2）種。

C. 排列　（Permutations）

(a)有n種不同的物品，則其排列的方法數${}_nP_n$一共有多少呢？例如有三件物品a，b，c，則其可能的排列爲abc，acb，bac，bca，cab和cba，一共是6種。排列n件物品，相當於按某一特定次序將它們放入有n個格子的盒子中。



第一個格子有n個方法來放入物品，第二個格子則有（$n-1$）個方法，……最後一格則只恰有一個方法。由乘法原理，我們知道，n件物品放入格子的方法有$n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\cdots\times1$個，此數經常出現，我們介紹它的特別名稱和符號。

【定義】 如果n爲正整數，定義$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots1$，稱之爲$n$階乘（n－factorial）且$0!=1$。

於是n件不同物品排列個數爲

$${}_nP_n=n!$$

(b)同樣考慮n件不同物品，這次我們由這些物品中，選取r件$0\leq r\leq n$，且加以排列，並以${}_nP_r$表示此種選取排列的個數。同樣將物品放入有n個格子的盒子內，這次我們在擺進第r個格子後，我們就停止了。於是第一個格子有n種方法放入物品，第二格子有$n-1$種，……第r個格子則有$n-r+1$種，再利用乘法原理，所以其辦法是一共有，$n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$

利用前面所介紹的階乘的定義，可以記爲

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

D. 組合　（Combinations）

再考慮n件不同物品，這次也是由n件不同物品中選取r件，但不考慮其次序，這種不計次序的選取方法的個數是我們所要討論的，例如：有四件物品

a，b，c，d 令 $r=2$。我們希望數數 ab，ac，ad，bc，bd 和 cd，換句話說，不數 ab 和 ba，因爲我們不考慮其先後次序。

再回想一下，由 n 件不同物品選取 r 件，而加以排列的方法的個數是 $n!/(n-r)!$ 令 C 表由 n 件不同物品取 r 件而不計其次序的方法的個數（亦即，C 即我們所要求的）。只要 r 件物品被選出，排列的方法有 $r!$ 種，因此，由乘法定理及上面的結果，所以

$$C\ r!=\frac{n!}{(n-r)!}$$

亦即

$$C=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

這種形式的數常常被用到，我們將其記爲

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=\binom{n}{r}$$

目前只在 n 是正整數而 r 是整數，且 $0\le r\le n$ 時，$\binom{n}{r}$ 才有意義，然而對任何實數 n 及非負整數 r，我們能定義

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$\binom{n}{r}$ 通常稱爲二項式係數（binomial coefficients），因爲 $(a+b)^n$ 展開時的係數，就如 $\binom{n}{r}$。若 n 是正整數，則 $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots\cdots(a+b)$，乘開時，每一項含有 k 個 a 與 $(n-k)$ 個 b 的乘積，$k=0$，1，……n，形如 $a^k b^{n-k}$ 有多少項呢，我們只要數一數由 n 個 a 中取 k 個，不計次序的方法數，但這數即爲 $_r\binom{n}{r}$，因此即得著名的二項式定理（binomial theorem）。

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$\binom{n}{r}$ 有許多很有趣的性質，此處只提其中的兩個，（除非特別聲明，我們假設 n 是正整數，r 是整數 $0\le r\le n$）。

(a) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

(b) $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$

上面的兩項性質很容易的代數方法得證。

利用對 $\binom{n}{r}$ 之解釋，也可以證實這兩個性質，記得 $\binom{n}{r}$ 是由 n 件不同的物品中取出 r 件的方法數。

(a)當我們從 n 件物品中，取出 r 件時，我們也同時留下 $(n-r)$ 件，因此

從 n 件中取 r 件，相當於從 n 件中取（ $n-r$ ）件，此即我們要證明的(a)。

(b)我們由 n 件中選取一件，令為 a_1 ，則由 n 件物品中選取 r 件物品時 ，可能含 a_1 ，也可能不含 a_1 ，若不含 a_1 ，我們必須由其餘的（ $n-1$ ）件中取出 r 件有 $\binom{n-1}{r}$ 種方法， 若含 a_1 ，則只須由其餘的（ $n-1$ ）件中取（ $r-1$ ）件，有 $\binom{n-1}{r-1}$ 種方法，由加法原理，我們得到 $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$ ，此即我們要證明的(b)。

【附註】 上文中，二項式係數 $\binom{n}{k}$ 只在 n，k 均為非負整數，且 $0\leq k\leq n$ 時才有意義，然而如果我們寫成

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}$$

此時，只是 n 是實數，k 為任意非負整數，就有意義，於是

$$\binom{-3}{5}=\frac{(-3)(-4)\cdots\cdots(-7)}{5!}\quad \text{等等。}$$

利用二項式係數的此種推廣，我們可以敘述二項式定理的普通形式（generalized form of the binomial theorem ）

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$$

此級數在任何實數 n 及所有的 x ，$|x|<1$ 的情況下才有意義 若 n 是正整數，則無窮級數化減為有限項，因為若 $k>n$ ，則 $\binom{n}{k}=0$ 。

【例題2－7】 (a)一共有8個人，問可有多少由3人組成的委員會。如果有任兩組委員會的組成分子相同，則視此兩委員會為一，（不管委員會中委員的次序），我們就有 $\binom{8}{3}=56$ 個可能的委員會。

(b) 8面不同的旗子，每種信號由3面旗子組成，問有多少種信號：此問題似乎和上題很相似，但此處旗子的先後次序很重要，因此有 $\frac{8!}{5!}=336$ 種信號。

(c)一團員有8個人，其中有5個男人，3個女人，問恰有兩個男人，一個女人的委員會有多少？我們必須由5個男人中選出2人，三個女人中選出1人，因此有 $\binom{5}{2}\binom{3}{1}=30$ 個委員會。

(d)我們可以證實先前的一項敘述，該敘述說：一個含 n 個元素的集合 ，其部份集合的個數是 2^n 。如果集合中的元素，包含在部份集合中，則記為1，否則為0。因為每一元素有兩種記法，故由乘法原理，我們有 $2\cdot 2\cdots\cdots 2=2^n$ 種記法，但每一種記法代表一個部份集合，例如（1，1，0……0）

代表由 a_1，a_2 組成的部份集合，（1，1，1，……1）代表 S 本身，（0，0……0）代表 ϕ。

(e)我們可以利用加法原理得(d)的結果。要求部份集合，則我們必須選取空集合，恰有一個元素的部份集合，恰有兩個元素的部份集合……及 S 本身，如此則有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots\cdots+\binom{n}{n}$$

種方法，然而這些二項式係數的和，即 $(1+1)^n$ 之展開。

且讓我們再考慮例 2－4，由一堆含 20 件不良品，80 件良品的物品中，隨機選取 10 件，但不放回，其方法有 $\binom{100}{10}$ 種，因此恰含 5 件不良品，5 件不良品的機率為

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}}$$

查表，大約等於 0.021 。

【例題2－8】 將前面的問題予以推廣，假設有 N 件物品，隨意取 n 件（不放回），則有 $\binom{N}{n}$ 不同的樣本數，每一種樣本被選取的機率均相等。若 N 件中有 r_1 件 A，r_2 件 B，$(r_1+r_2=N)$，則 n 件有 S_1 件 A，$(n-S_1)$ 件 B 的機率為

$$\frac{\binom{r_1}{s_1}\binom{r_2}{N-S_1}}{\binom{N}{n}}$$

（上式稱為超幾何機率（hypergeometric probability），而在以後，我們還會遇到它）。

【附註】 隨機選取物品時，說明是否放回是很重要的，通常不放回比較合乎實際，例如當我們檢查產品時，通常不願檢查產品兩次。前面我們已經提過由 n 件中取 r 件，而不計其次序的方法數為 $\binom{n}{r}$。由 n 件物品中取出 r 件，每件放回的方法數為 n^r，（此處要計其次序）。

【例題2－9】 假設隨機由四件物品，a，b，c，d 中任取兩件

(a)不放回，則樣本空間為

$$S=\{(a,b);(a,c);(b,c);(b,d);(c,d);(a,d)\}$$

有 $\binom{4}{2}=6$ 種可能的結果。每一結果僅指示那兩件物品被選取，而不管其取出的次序。

(b)放回，則樣本空間為

$$S'=\left\{\begin{matrix}(a,a);(a,b);(a,c);(a,d);(b,a);(b,b);(b,c);(b,d)\\(c,a);;(c,b);(c,c);(c,d);(d,a);(d,b);(d,c);(d,d\end{matrix}\right\}$$

有$4^2=16$種可能的結果，非但指出那兩件物品被取出，而且也指出其先後次序。若取出而不放回，則S中所有的結果都是相等可能。若取出再放回，則S'中的所有結果都是相等可能。於是，若$A=\{C$被取出$\}$則由S，取出不放回$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。由$S'$，取出放回則$P(A)=\frac{7}{16}$。

E. 所有物品並非全不相同時的排列（Permutations when not all objects are different）

上面所介紹的計數方法，我們都假定物品全不相同，（亦即均可辨別），但也有些例外。假設n件物品中，第一類n_1件，號二類n_2件，…… 第k類n_k件，$n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k=n$，則這些物品的排列方法數有

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\cdots\cdots n_k!}$$

種，此證明由讀者自行導證，注意如果所有物品均不相同$n_i=1$，其中$i=1,2,\cdots\cdots k$，上面的公式即成爲$n!$，與前面所得到的結果是一樣的。



2－1 某房間內男人中五個超過21歲，四個少於21歲，女人則六個超過21歲，三個少於21歲。

定義：事件A：｛超過21歲的人數｝，事件C：｛男性｝

事件B：｛少於21歲的人數｝，事件D：｛女性｝

從房內任選出一份子，則(a)$P(B\cup D)$，(b)$P(\overline{A}\cap\overline{C})$爲何？

2－2 房內10人，穿1～10標號的衣服，任取出三人，令其同時離去，並記下衣服標號，則(a)最小標號爲5的概率爲何？(b)最大標號爲5的概率爲何？

2－3 (a)1，2，3三數隨意寫，則至少有一數字在其正確位置的機率爲何？

(b)當寫1，2，3，4四數字時，情形爲何？

(c)寫1，2，3，……，n數時如何？

(d)當n甚大時，描述(c)之結果。

2－4 1500台洗衣機有400台爲不良品；任取200台（選出後不置回），並將之分類，(a)剛好90台爲不良品之P爲何？(b)至少有2台爲不良品的機率爲何？

2－5 碗中有10片薄片，編號爲1到10，編號(X,Y)之兩片連續且不放回地取出，問$X+Y=10$之機率。

2－6 一堆物品，10件好件，4件有小毛病，2件有大毛病，隨機取一物品，求下列的機率：

(a)沒有毛病　(b)沒有大毛病　(c)不是好件就是有大毛病

2－7 如習題2－6。取出兩物（不放回地），求下列機率：

(a)兩物均是好件　(b)兩物均有大毛病　(c)至少有一好件

(d)最多有一好件　(e)恰有一好件　(f)均無大毛病

(g)均非好件

2－8 一產品由3階段裝配成，第一階段有5個裝配線，第二階段有4個，第三階段則有6個，問產品有多少不同的裝配路線？

2－9 檢查員每天檢查6種不同的機器，爲了不讓操作員知道他何時去檢查，他改變檢查順序，問有多少檢查方法？

2－10 一架複雜的機械可能壞在15個部位，若有3個部份損壞，問如此發生的方式有多少種？

2－11 產品產生小毛病有12種方法，大毛病有10種方法，問有一小毛病一大毛病發生的方法共有多少種？兩小毛病，兩大毛病又如何？

2－12 機械可安置 a，b，c，d 任一位置。有8架這種機械被安置在一系統裏。

(a)此系統安置的方法有多少種？

(b)假若這些機械按某些設計好的順序安裝。如果沒有兩架接近的機械在同一位置，問安置系統的方法有幾種？

(c)如果只有 a 和 b 兩個位置可使用，且使用的機會相等，則安置系統的方法有幾種？

(d)如果只有兩個不同的位置可使用，且其中一個位置使用的次數是另一個的三倍，問安置系統的方法有幾種？

2－13 在 N 物中，任取 n 個（選出後置回）求不重複選取相同物品或然率爲何？

2－14 安排 a，b，c，d，e，f 六字母於四位置上，假如(a)字母不准重複在同一位置。(b)任何字母可以重複多次。

2－15 假設 ${}_{99}C_5 = a$，${}_{99}C_4 = b$，以 a，b 表 ${}_{100}C_{95}$。

2－16 盒中有標以1……n 之標籤，則二者爲連續數的概率爲何？

(a)選取後不置回。　(b)選取後即置回。

2－17 集合中含有100元素，則至少包含一元數的部份集合有多少？

2－18 1，2……50中任取一數，則可被6或8整除之數的概率爲何？

2－19 6正數，8負數中任取4數（取後不置回），並將取出之數相乘，問乘積是正數的機率？

2－20 某化合物由五種液體混合而成，當加入順序不同時，結果亦將不同，現將五種順序加入，以得化合物最佳特性的組合方式，問須經多少次試驗？

2－21 n 物件中，已經知 r 物件爲不良品，現任意抽樣檢查，則第 k 物件爲最後一個不良品的相率爲何？設（$k \geq r$）

2－22 自0，1，2，……，9中隨機選取 r 個（$0 < r < 10$）數字（不置回）

，則沒有兩字相同的機率多少？



2－1

【解】 (a) $P(B\cup C)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)$

$$=\frac{7}{18}+\frac{9}{18}+\frac{3}{18}=\frac{13}{18}$$

$P(A)=\frac{11}{18}$ ， $P(\bar{A})=\frac{7}{18}$ ， $P(B)=\frac{7}{18}$

$P(\bar{C})=\frac{1}{2}$ ， $P(C)=\frac{9}{18}$ ， $P(B\cap D)=\frac{3}{18}$

$P(D)=\frac{9}{18}$ ， $P(A\cap C)=\frac{5}{18}$

(b) $P(\bar{A}\cap\bar{C})=P(\overline{A\cup C})=1-P(A\cup C)=1-\frac{15}{18}=\frac{1}{6}$

〔 $\because P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$

$$=\frac{11}{18}+\frac{9}{18}-\frac{5}{18}=\frac{15}{18}$$ 〕

2－2

【解】

(a) $\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}\right]=\frac{1}{36}$ 　在大於5之6，7，8，9，10五數中取2人。

在除了5外之9個數中取二人。

先選出5的概率

又令三人同時離去，所以有：

5 0 0　　0 5 0　　0 0 5　三種情形

$\therefore\quad P=\frac{1}{36}\times 3=\frac{1}{12}$

(b)同理可得 $\frac{1}{10}\left[\frac{4C_2}{9C_2}\right]=\frac{1}{60}$ ， $\frac{1}{60}\times 3=\frac{1}{20}$

此次爲1，2，3，4中取二人

〔 或 〕在6，7，8，9，10中取二人，剩下則取5 。

$\therefore$ (a) $P=\frac{5C\cdot 1}{10C_3}=\frac{1}{12}$ ，

(b)在1，2，3，4中取二人， $P=\frac{4C_2\cdot 1}{10C_2}=\frac{1}{20}$

2－3 (a)事件 A：{數字 1 在正確位置}，事件 B：{數字 2 在正確位置}

事件 C：{數字 3 在正確位置}

$$P(A)=\frac{{}_2P_2}{{}_3P_3}=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}，P(B)=\frac{1}{3}，P(C)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$A\cap B=${1，2 在正確位置}，$\therefore P(A\cap B)\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$

同理 $P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{6}$ 6

$A\cap B\cap C=${1，2，3 在正確位置}

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{3}(1+1+1)-\frac{1}{6}(1+1+1)+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

(b)同上事件 D：{數字 4 在正確位置}

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)=P\{(1,2,3,4),(1,2,3,4)\}=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$$

同理 $P(B\cap C)=P(A\cap C)=P(A\cap D)=P(B\cap D)$

$$=P(C\cap D)=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cap B\cap C)=P\{(1,2,3,4)\}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

同理 $P(A\cap C\cap D)=P(A\cap B\cap D)=P(B\cap C\cap D)=\frac{1}{24}$

又 $P(A\cap B\cap C\cap D)=\frac{1}{24}=\frac{1}{4!}$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)\\&-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)\\&-P(A\cap D)-R(B\cap D)-P(C\cap D)\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap C\cap D)\\&+P(A\cap B\cap D)+P(B\cap C\cap D)\\&-P(A\cap B\cap C\cap D)\\&=\frac{1}{4}\times 4-\frac{1}{12}\times 6+\frac{1}{24}\times 4-\frac{1}{24}\\&=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

(c)由(a)(b) $P(A_1) = P(A_2) = \cdots\cdots = P(A_n)\ \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

$\therefore \sum_{i=1}^{k} P(A) = 1$

$P(A_i \cap A_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

〔∵有二位置正確，其餘作 $(n-2)$ 排列〕

而 $P(A_i \cap A_j)$ 共有 ${}_nC_2$ 個，${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\therefore \sum_{i\ j=2}^{k} P(A_i \cap A_j) = \dfrac{n(n-1)}{2} \times \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{2}$

同理 $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$

${}_nC_3 \cdot \dfrac{(n-3)!}{n!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1} \times \dfrac{(n-3)!}{n!} = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$

因之 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots\cdots \cup A_n)$

$= 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}$

(d) $\because e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\cdots$

令 $x = 1$，$e^{-1} = \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n-1)!} + \cdots\cdots$

$\therefore P(A_1 \cup A_2 \cdots\cdots \cup A_n) = 1 - \left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots\cdots\right.$

$\left.+ (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n-1)!} + \cdots\cdots\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{e}$

2－4

【解】 (a) $P = \dfrac{{}_{400}C_{90} \cdot {}_{1100}C_{110}}{{}_{1500}C_{200}}$

(b) $P_1 = \dfrac{{}_{400}C_1 \cdot {}_{1100}C_{199}}{{}_{1500}C_{200}}$

$P_0 = \dfrac{{}_{400}C_0 \cdot {}_{1100}C_{200}}{{}_{1500}C_{200}}$

∴至少2　個不良品爲 $1 - P_0 - P_1$

2－5

【解】 適合 $X+Y=10$ 序對爲

$\{(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)\}$

∴概率爲 $\dfrac{8}{10\times 9}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$

2－6

【解】

(a) $\dfrac{\binom{10}{1}}{\binom{16}{1}}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$ ，(b) $1-\dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{16}{1}}=\dfrac{7}{8}$ ，(c) $1-\dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{16}{1}}=\dfrac{3}{4}$

2－7

【解】 (a) $\dfrac{10C_2}{16C_2}=\dfrac{3}{8}$ ，(b) $\dfrac{{}_{10}C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{3}{8}$ ，(c) $1-\dfrac{{}_6C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{7}{8}$

(d) $1-\dfrac{{}_{10}C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{5}{8}$ ，(e) $\dfrac{{}_{10}C_1\times{}_6C_1}{{}_{16}C_2}=\dfrac{1}{2}$ ，(f) $\dfrac{{}_{14}C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{91}{120}$

(g) $\dfrac{{}_6C_2}{{}_{16}C_2}=\dfrac{1}{8}$

2－8

【解】 $5\times 4\times 6=120$ 種

2－9

【解】 ${}_6P_6=6!=720$

2－10

【解】 ${}_{15}C_3=455$

2－11

【解】 $12\times 10=120$ ， ${}_{12}C_2\times{}_{10}C_2=2970$

2－12

【解】 (a) 4^8 →∵每一機器可插入 4 個位置。

(b) 4×3^7 →第一機器有 4 個位置，以後每一機器只有三個位置。

(c) ${}_8C_4\cdot{}_4C_4=70$

(d)要在 4 個位置中選出二個位置之方法爲 ${}_4C_2$ ，假如一位置插入機會爲另一位置之三倍，則必有 6 個插入一位置，二個插入另一位置。

∴方法爲： ${}_4C_2\times{}_8C_6\times 2$ →∵可能有

$=336$ 　　　　6　2

　　　　　　　2　6

2－13

【解】 $\frac{N(N-1)(N-2)\cdots\cdots(N-n+1)}{N^n}$

2－14

【解】 (a) ${}_6P_4=\frac{6!}{2!}=6\times5\times4\times3=360$

(b) 6^4（∵每一位置可填入六字母）

2－15

【解】 由公式 ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

$\therefore {}_{100}C_{95}={}_{100}C_5={}_{99}C_4+{}_{99}C_5=a+b$

2－16

【解】 (a) n 標籤中可成連續隊的有（$n-1$）對

$\therefore P=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$

因選後不置回，可能有（6，5），（5，6）二情形

(b) $P=\frac{(n-1)\times2}{n^2}=\frac{2(n-1)}{n^2}$

（∵取出第一籤與第二籤皆有 n 種方法，而連續對情形與(a)同）

2－17

【解】 因集合中每一元素有“取”與“不取”二情況。

∴所有子集合（包含本身和 ϕ）在內有 2^{100} 個。

∵ ϕ 不包含任一元素。 ∴ $2^{100}-1$ 。

2－18

【解】 6與8之倍數爲6，12，18，24，30，36，42，48，8，16，~~24~~，32，40，48

$\therefore P=\frac{{}_{12}C_1}{{}_{50}C_1}=\frac{1}{25}$ 乘，則乘數爲正的概率爲何？

2－19

【解】 取出4個正數　取出二正二負數　取出4負數

$P=\frac{{}_6C_4+{}_6C_2\cdot{}_8C_2+{}_8C_4}{{}_{14}C_4}=\frac{505}{1001}$

2－20

【解】 5！

2－21

【解】

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k-1\text{個}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-k+1\text{個}}$

其中有 $r-1$ 個不良品

$$\therefore P=\frac{\binom{r}{r-1}\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k-1}}\cdot\frac{1}{n-k+1}$$

2－22

【解】 $P=\frac{{}_{10}P_r}{10^r}=\frac{10!}{10^r(10-r)!}$

（取出剛好為 r 個不同之排列為 ${}_{10}P_r$ ，而樣本空間所有元素為 10^r ）

第三章　條件機率及獨立事件

§3－1 條件機率　(Conditionary Probability)

考慮重置抽樣與不重置抽樣的區別，以例題2－4的情形來說，有 80 個良，20 個不良品。假設我們用兩種方法來抽樣(a)將樣品放回(b)不放回，定義 A 及 B 兩事件。

$A=\{$第一次抽樣是不良品$\}$

$B=\{$第二次抽樣是不良品$\}$

如果以(a)重置抽樣法，則 $P(A)=P(B)=\dfrac{20}{100}=\dfrac{1}{5}$，因爲在每次抽樣的母體中，總有 20 個不良品存在。但是，如果以(b)不重置的抽樣法，則其結果是大不相同的。很顯然的，$P(A)=\dfrac{1}{5}$，但 $P(B)=$？我們必須先知道第二次抽樣時，樣本的組成情形如何，亦即討論的是 A 發生的與否，爲此，我們介紹以下的條件機率的觀念。

設 A，B 爲來自同一隨機試驗中的兩事件。我們稱 $P(B\mid A)$ 爲 A 事件發生時，B 事件的條件機率。由上例可知 $P(B\mid A)=\dfrac{19}{99}$。因爲第一次抽樣發生後，只剩下 99 個樣本，而不良品數目爲 19 個。

由於已知事件 A 的發生，所以 A 事件以外的樣本空間 S，全不可能發生。而其樣本空間也因而由 S 緊縮爲 A。亦即，欲求 $P(B\mid A)$ 之值，乃是求 B 對緊縮樣本空間（reduced sample space）A 的機率。這可以圖3－1表示之。

【例題3－1】 擲兩個骰子，分別將其結果記錄爲 (x_1, x_2)，其中 x_i 是代表第 i 次出現的骰子，$i=1, 2$。因此，我們可以將其樣本空間 S，表示成下列的形式。

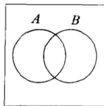


圖3－1

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1)(1,2)\cdots\cdots(1,6)\\(2,1)(2,2)\cdots\cdots(2,6)\\\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\(6,1)(6,2)\cdots\cdots(6,6)\end{Bmatrix}$$

同時有兩事件

$A=\{(x_1, x_2)\mid x_1+x_2=10\}$

$B=\{(x_1, x_2)\mid x_1>x_2\}$

所以 $A=\{(5, 5, (4, 6), (6, 4)\}$，而 $B=\{(2, 1), (3, 1)$ $(3, 2)\cdots\cdots(6, 5)\}$，$P(A)=\dfrac{3}{36}$，$P(B)=\dfrac{15}{36}$，同時 $P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$

，因為樣本空間由A所組成，而這樣本空間A的三個元素，只有一個在B中。同樣地，$P(A \mid B)=\frac{1}{15}$。

最後，我們計算$P(A\cap B)$，事件$A\cap B$發生的條件為若且唯若兩骰子點數和為10且第一骰子的點數大於第二骰子。只有一個符合條件的結果，因此$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$。如果我們很仔細觀察的話，我們會發現。

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

這些關係式並不是一定適合在我們所考慮的特殊例子裏，但是，却相當普遍的而且給予我們一個正式定義條件機率的方法。

為了學習此項定義，我們再考慮相對頻率的觀念。設若進行n次的實驗ε，且N_A，N_B及$N_{A\cap B}$，分別代表事件A，B及$A\cap B$發生的次數。$N_{A\cap B}/N_A$有什麼意義呢？它代表在A發生的結果之中，B的相對頻率。亦即$N_{A\cap B}/N_A$是已知A發生，B的條件相對次數（Conditional relative frequency）我們將$N_{A\cap B}/N_A$表示如下

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_A}=\frac{N_{A\cap B}/N}{N_A/N}=\frac{f_{A\cap B}}{f_A}$$

此處$f_{A\cap B}$，f_A，分別為事件$A\cap B$及A的相對頻率，正如以前我們提示的（稍後我們也將證明），如果實驗的次數N很大，$f_{A\cap B}$將接近$P(A\cap B)$，f_A則接近$P(A)$，因而$N_{A\ \ B}/N_A$也將接近於$P(B \mid A)$。

【定義】 $$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\text{，若}P(A)>0$$

【附註】 (a)注意上面並非一個定理（我們並沒有證明什麼），也不是公設。我們只介紹條件機率的直覺觀念，然後由此觀念做正式的定義而已，定義之前的那一段，證實了我們的定義相當於我們的直觀的事實。

(b)對於特定的A，我們可以很簡單的證明$P(B \mid A)$滿足（1－3）式的各種特性，亦即我們可以得到。

（1′）　$0\le P(B \mid A)\le 1$

（2′）　$P(S \mid A)=1$

（3′）　$P(B_1\cup B_2 \mid A)=P(B_1 \mid A)+P(B_2 \mid A)$

若$B_1\cap B_2=\phi$

（4′）　$P(B_1\cup B_2\cup\cdots\cdots \mid A)=P(B_1 \mid A)+P(B_2 \mid A)+\cdots\cdots$若$B_i\cap B_j=\phi$，$i=j$

(c)如果$A=S$，則$P(B \mid S)=P(B\cap S)/P(S)=P(B)$

(d)對任何事件$B\subset S$，我們可以聯想到兩個數$P(B)$和$P(B \mid A)$，前者為B的（非條件）機率，後者為B的條件機率（事件A為已知

）。通常，如前面我們所曾提示過的例子，$P(B)$ 和 $P(B \mid A)$ 是不相等的，但隨後，我們將探討 $P(B)$ 和 $P(B \mid A)$ 相等的情形。

(e)條件機率是由非條件機率 P 所表示。亦即，若對 $B \subset S$ 我們知道 $P(B)$，則我們就能對 $B \subset S$ 求出其 $P(B \mid A)$。

如此，我們可有兩種方法求條件機率 $P(B \mid A)$

(a)直接由縮減 A 的樣本空間，以求得 B 的機率。

(b)利用上面的定義，直接以原來的樣本空間 S 而求 $P(A \cap B)$ 和 $P(A)$。

【附註】　若 $A = S$，則因爲 $P(S) = 1$ 和 $B \cap S = B$，我們得到

$$P(B \mid S) = P(B \cap S) / P(S)$$

【例題3－2】　假設一辦公室有100台計算機，有些是電動的 (E)，其餘的爲手動的 (M)。有些是新的 (N)，而其餘則爲使用過的 (U)。表3－1中的每一項提示我們有關的說明。若有一個人進入這辦公室，隨機選一架，發現它是全新的，則它是電動的機率爲何？以所介紹的符號說明，即是要求 $P(E \mid N)$。

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

考慮縮減 N 的樣本空間 N，（亦即，全新的有70架），則 $P(E \mid N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$。利用條件機率的概念，我們知道

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{4}{7}$$

以上條件機率的定義，可以得到很重要的形式，如下所列

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\,P(A) \qquad (3-3a)$$

也可表示爲

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\,P(B)$$

有時，稱此爲機率的乘法原理（multiplication theorem）。

我們能用此定理，求出事件 A 和 B 同時發生的機率。

【例題3－3】　考慮3－1節開頭的例子，一堆物品含有20件不良品，80件良品，若我們隨機選取兩件（不再放回），求兩件均是不良品的機率爲何？

如前，我們定義事件 A，B 爲

$A = \{$第一件爲不良品$\}$，$B = \{$第二件爲良品$\}$

因此，我們須要 $P(A \cap B)$，由上面的公式我們能求出如用 $P(B \mid A)$

$P(A)$，但 $P(B \mid A)=\dfrac{19}{99}$，$P(A)=\dfrac{1}{5}$ 故，$P(A\cap B)=\dfrac{19}{495}$

【附註】 上面的乘法定理（3－3a），可以推廣到兩事件以上。

$$P[A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n]=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1,A_2)\cdots\cdots P(A_n\mid A_1,\cdots\cdots A_{n-1}) \qquad (3-3b)$$

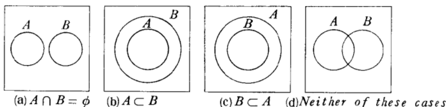
我們暫時考慮對 $P(A\mid B)$ 和 $P(A)$ 的相對大小，做大略的陳述。我們考慮四個情況，這些可以由圖3－2加以說明。

(a) $P(A\mid B)=0\leq P(A)$，因為若 B 發生則 A 就不發生。

(b) $P(A\mid B)=P(A\cap B)/P(B)=[P(A)/P(B)]\geq P(A)$，因為 $0\leq P(B)\leq 1$

(c) $P(A\mid B)=P(A\cap B)/P(B)=P(B)/P(B)=1\geq P(A)$

(d) 在此情況下，我們無法陳述 $P(A\mid B)$ 與 $P(A)$ 的相對大小。



(a) $A\cap B=\phi$　(b) $A\subset B$　(c) $B\subset A$　(d) *Neither of these cases*

圖 3－2

注意上面的情形，其中(a)的 $P(A)\leq P(A\mid B)$ 及(d)的 $P(A)\geq P(A\mid B)$，我們無法對其比較大小。

以上我們利用條件機率的觀念，以計算兩事件同時發生的機率。我們能用此觀念以另外一種方法，計算單獨事件 A 的機率，我們有下面的定義。

【定義】事件 B_1，B_2 ……B_k 代表樣本空間 S 的分割（partition）若

(a) $B_i\cap B_j=\phi \quad \forall\, i\neq j$

(b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i=S$

(c) $P(B_i)>0 \quad \forall\, i$

此即實驗 ε 進行時，有一且恰有一事件 B_i 發生。

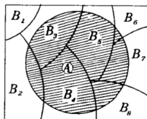


圖 3－3

（例如，投擲一個骰子，$B_1=\{1,2\}$，$B_2=\{3,4,5\}$，$B_3=\{6\}$，就是樣本空間的一個分割，而 $C_1=\{1,2,3,4\}$，$C_2=\{4,5,6\}$，則不是。）

令 A 表 S 的某事件，且令 B_1，B_2……B_k 是 S 的一個分割，圖3－3說明

$k=8$ 的情形，我們可以寫成。

$$A=A\cap B_1\cup A\cap B_2\cup\cdots\cdots\cup A\cap B_k$$

當然，有些集合 $A\cap B_i$ 可能是空集合，但這不能影響上式的正確性。最重要的是所有的事件 $A\cap B_1\cdots\cdots A\cap B_k$ 均爲互斥。因此我們可以利用互斥事件的加法性質（式1－2）記爲

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\cdots\cdots+P(A\cap B_k)$$

然而 $P(A\cap B_j)$ 每一項均能表示爲 $P(A\mid B_j)P(B_j)$，因此我們得到全機率（total probaility）的定理。

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\cdots\cdots+P(A\mid B_k)P(B_k) \quad (3-4)$$

這結果相當有用，因爲需要 $P(A)$ 時，往往很難直接計算 $P(A)$。然而假如 B_i 已得知道，則我們可以計算 $P(A\mid B_j)$ 然後再利用上式。

【例題3－4】 考慮（最後一次）一堆物品，20件不良品，80件良品，從中我們選取兩件，但不放回，定義。

$A=\{$第一件是不良品$\}$　，　$B=\{$第二件是不良品$\}$

我們可以如下計算 $P(B)$

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})$$

利用例題3－3的計算，我們發現

$$P(B)=\frac{19}{99}\cdot\frac{1}{5}+\frac{20}{99}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

這結果可能有點令人驚訝，特別是若回想3－1節的開頭，那時我們選取物品而放回，我們發現 $P(B)=\frac{1}{5}$。

【例題3－5】 產品由三個工廠，1，2，3，分別製造。已知廠1的產量爲廠2產量的兩倍，廠2和廠3有同一的產量（在某一時期內）。又知廠1和廠2不良品佔2％，廠3則佔4％，所有的產品都被放入倉庫內，然後從倉庫內隨機抽取一件產品，求其爲不良品的機率爲若干？

先讓我們介紹下面的定義

$A=\{$產品爲不良品$\}$　，　$B_1=\{$產品來自廠1$\}$

$B_2=\{$產品來自廠2$\}$　，　$B_3=\{$產品來自廠3$\}$

我們得用上面的結果求 $P(A)$。

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+P(A\mid B_3)P(B_3)$$

現在 $P(B_1)=\frac{1}{2}$，而 $P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{4}$

同時 $P(A\mid B_1)=P(A\mid B_2)=0.02$，而 $P(A\mid B_3)=0.04$

將這些數值代入上式，我們可以求得 $P(A)=0.025$。

【附註】 在化學工廠裏面，也有類似的機率問題出現：

假設在 k 個燒杯內含有不同溶解度的相同的鹽，其溶液總共為 1 升，令 $P(B_i)$ 代表第 i 個燒杯溶液的體積，$P(A|B_i)$ 代表第 i 個燒杯溶液的濃度，則 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+\cdots\cdots P(A|B_k)P(B_k)$。

§3－2 貝氏定理 (Bayes' Theorem)

我們可以由例 3 － 5 而得到其他重要的結果，假若從倉庫取一產品，而發現它是不良品，求它是來自廠 1 的機率為何？

利用以前所介紹過的符號，我們要求 $P(B_1|A)$，令 B_1，B_2，$\cdots\cdots B_k$ 是樣本空間 S 的一個分割，而且 A 為 S 的一事件，利用條件機率的定義，我們得到

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k}P(A|B_j)P(B_j)}\quad i=1,2\cdots\cdots k \tag{3－5}$$

此結果即為貝氏定理，也稱之為“原因”的機率公式。因為 B_i 是樣本空間的一個分割，僅有一個 B_i 發生（亦即，有一個 B_i 發生且只有一個能發生）。因此上面的公式告訴我們一特殊 B_i（即一個原因）的機率，且已知事件 A 已發生，為了應用此定理，我們必須知道 $P(B_i)$ 之值， 通常這些值我們不知道，這就限制了此結果的應用範圍，對於貝氏定理，已經有過很多的爭論，但在數學上它是非常正確的，只有選擇了不適當的 $P(B_i)$，才會使結果產生問題。

再回想上面的問題，且利用（3 － 5）式，我們得到

$$P(B_1|A)=\frac{(0.02)(\frac{1}{2})}{(0.02)(\frac{1}{2})+(0.02)(\frac{1}{4})+(0.04)(\frac{1}{4})}$$

$$=0.40$$

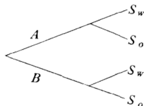
【附註】 我們又在化學工廠裏，發現一類似貝氏定理的現象，在 k 個燒杯內我們有相同的鹽，但不同濃度的溶液。假定溶液總共為一升。將第 i 個燒杯內溶液的體積記為 $P(B_i)$，濃度為 $P(A|B_i)$，則由 3 － 5 式我們得到第 i 個燒杯的鹽所佔有的比率。

下面貝氏定理的有關說明，將介紹樹形圖（tree diagram）的概念，對於分析某些問題相當有用。

假設糖果的包裝，有兩種型式，型 A 及型 B，型 A 中有 70 % 是甜的，30 % 為酸的，型 B 則剛好相反，又假設所有的包裝中，有 60 % 是型 A，其餘 40 % 則為型 B。

現在遇到下面有關的決策問題，如果有一不知何種型式的包裝，允許我們只抽一塊糖果，且利用此結果，猜猜是型 A 或型 B，下面的樹形圖將幫助我們分析

問題。（S_w，S_o 分別代表甜和酸）



讓我們做些演算

$P(A)=0.6$ ， $P(B)=0.4$ ， $P(S_w \mid A)=0.7$

$P(S_o \mid A)=0.3$ ， $P(S_w \mid B)=0.7$ ， $P(S_w \mid A)=0.7$

眞正我們想知道的是$P(A \mid S_w)$，$P(A \mid S_o)$，$P(B \mid S_w)$及$P(B \mid S_o)$，亦卽，假若我們所抽的是甜的糖果，我們要做何決定呢？且讓我們比較$P(A \mid S_w)$和$P(B \mid S_w)$，利用貝氏定理，我們得到

$$P(A \mid S_w)=\frac{P(S_w \mid A)P(A)}{P(S_w \mid A)P(A)+P(S_w \mid B)P(B)}$$

$$=\frac{0.7\times 0.6}{0.7\times 0.6+0.3\times 0.4}$$

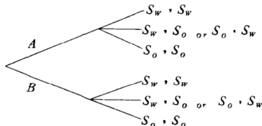
$$=\frac{7}{9}$$

同樣演算，我們得到$P(B \mid S_w)=\frac{2}{9}$

由此，按照我們所得到的，則此糖果來自型A的可能性是型B的 $3\frac{1}{2}$倍，所以，通常我們會猜想是來自型A，（當然，也許我們會猜錯，但以上所述其要點乃是要我們選最可能發生的一個）。

利用樹形圖，前面的計算眞正需要做的是由後向前推算的分析。亦卽，我們已知道的觀察爲S_w，要求其與型A有關的可能性有多大。

更有趣的是，如果在未決定是型A抑型B之前，允許我們抽取兩個糖果，則在這種情況下，其樹形圖爲



在習題$3-2b$ 中，你要從你所觀察到的三個結果中，去推論其可能爲型A或型B。

§3-3 獨立事件 (Independent Events)

我們已考慮過不會同時發生的兩事件 A 和 B，即 $A \cap B = \phi$，如此之事件，我們稱之爲互斥（mutually exclusive），我們注意到如果事件 A，B 互斥則 $P(A \mid B) = 0$，因爲 B 發生，則 A 就不可能發生。在其他情形中，如 $B \supset A$ 這種情形，此時 $P(B \mid A) = 1$。

以上每種情形，已知 B 發生，則 A 發生的機率給我們很明確的指示，然而却有很有很多情況，雖然已確實知道 B 發生，但 A 發生與否却與之毫無關係。

【例題3-6】 假若我們投擲均勻骰子兩次，定義事件 A，B 如下

$A = \{$第一次出現偶數$\}$ $B = \{$第二次出現 5 或 6$\}$

似乎事件 A 和 B 沒有任何關係，知道 B 發生却不能告訴我們 A 是否發生。事實上，下面的計算將使我們更淸楚。與例題3-1 相同的 36 個相等可能的結果爲我們的樣本空間我們得到

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

因此

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

於是我們發現，正如我們所期望的，非條件機率等於條件機率，即 $P(A \mid B) = P(A)$ 同樣

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$$

因此我們可以嘗試地說：若且唯若 $P(A \mid B) = P(A)$ 和 $P(B \mid A) = P(B)$，則 A 與 B 爲獨立的，雖然在本質上是很適合的，但也有另外一種方法，使我們避免在此所遭遇的困難，如爲使上式有意義，可以設 $P(A)$ 和 $P(B)$ 均不爲零。

考慮 $P(A \cap B)$，假設上面的條件機率等於相對應的非條件機率，我們知道

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\,P(B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\,P(A) = P(B)\,P(A)$$

於是我們發覺若 $P(A)$，$P(B)$ 均不爲零，若且唯若 $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$，則非條件機率等於條件機率。我們有以下的定義。（如果 $P(A)$，$P(B)$，兩者中有一爲零，此定義仍成立）。

【定義】 A 和 B 爲獨立事件，若且唯若

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

【附註】　此定義和前一定義，實質上是對等的，（即A，B為獨立，當$P(B \mid A) = P(B)$及$P(A \mid B) = P(A)$時）。後與的定義較直覺些，因為它說出了以前我們所想說的：若A的發生，不影響B發生的機率，則A，B為獨立。

我們所使用的正式定義，也有某些程度的直覺，如下面的例子所示。

【例題3－7】　再考慮例題3－2，參看下表，它只給我們邊際值，亦即有60架電動的和40架手動的。而這100架中有60架為全新的，40架為已使用過的

	E	M	
N			70
U			30
	60	40	100

有好幾種方法可以填此表，我們列舉一些

(a)

	E	M	
N	60	10	70
U	0	30	30
	60	40	100

(b)

	E	M	
N	30	40	70
U	30	0	30
	60	40	100

(c)

	E	M	
N	42	28	70
U	18	12	30
	60	40	100

考慮表(a)，此情況中，所有電動的計算機都是新的，而所有使用過的，都是手動的。因此電動的和全新的特性有明顯的關係（不必是因果關係）。同樣表(b)所有手動的計算機都是新的，而所有使用過的都是電動的，因此似乎有某種明顯的關係，在這些特性之間。然而，當我們再看表(c)時，就大有不同了，此時設有明顯的關係存在，例如所有計算機中60％為電動，已用過的計算機中有60％是電動的。同樣，70％的計算機是新的，而手動的計算機中有70％是新的……等等，因此，新的和電動的之間沒有明顯的關係，當然此表是為說明此種性質而設計的，表內的項是如何得到的呢？利用3－6式即可，即因為$P(E) = \dfrac{60}{100}$，$P(N) = \dfrac{70}{100}$，而且是獨立，我們必須有$P(E \cap N) = P(E)P(N) = \dfrac{42}{100}$。因此表內全新電動的計算機應為42架，其他各項同理可得到。

在很多的應用裏，我們將假設兩事件A，B為獨立，然後，利用此項假設以$P(A)P(B)$求得$P(A \cap B)$，通常在實驗進行時的實際條件，可以決定此項假設是否為全部被證實，或大略地可以證實。

【例題3－8】　有10,000件的物品，其中10％為不良品，其餘90％為良品，隨機選取2件，求2件均為良品的機率為若干？

【定義】　A，B兩事件如下：

$A = \{$第一件是良品$\}$　，　$B = \{$第二件是良品$\}$

如果我們假定在抽取第二件之前，第一件被放回，則事件 A，B 可以被視爲獨立事件，因此 $P(A \cap B) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$ 更實際的情況，如果第一件不被放回，則

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \frac{8999}{9999}(0.9)$$

此值很接近於0.81。因此，雖然 A，B 並非獨立，但可假定它們爲獨立而簡化計算，其誤差可小得忽略，（回想一下 1－1 節所講的數學模型的目的），如果只有幾件物品，譬如只有 30 件，則獨立事件的假設，其所導致錯誤的可能性較大，於是爲了建立各種事件獨立的假設是否爲可行，必須仔細檢查實驗的各種條件。

【例題 **3－9**】 假設一種機械是由兩個零件 C_1，C_2 串聯而成，如圖 3－4 所示。每一零件故障的機率爲 P，求機械能操作的機率

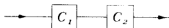


圖 3－4

顯然地，若機械能操作的話，其兩個零件必然設有失靈。反之亦然。因此

機械操作的機率＝C_1 和 C_2 均能操作的機率

除非我們知道（或假定）兩件零件彼此獨立，否則我們就無法討論下去，這種假設能否合乎實際情況，端視於兩零件如何的組合，如果我們假設兩零件獨立操作，我們所求的機率爲 $(1-P)^2$。

我們將上面獨立的觀念，推廣到兩事件以上是相當重要的，我們首允考慮與實驗有關的事件 A，B，C。若 A 和 B，A 和 C，B 和 C 它們均是兩兩獨立，則大致上不能說事件 A，B，C 之間沒有任何相依。下面的例子（有點修飾）說明了這一點。

【例題 **3－10**】 假設投擲骰子兩次，且定義事件 A，B，C 爲

A＝{第一次骰子出現偶數}

B＝{第二次骰子出現奇數}

C＝{兩次均出現偶數或均是奇數}

我們得到 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$，且 $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$，因此，此三個事件爲兩兩獨立，但

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

【定義】 我們說三事件 A，B，C 爲相互獨立（mutually independent），若且唯若下列的條件成立

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C) \qquad (3\text{–}7)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C) \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

我們將此種觀念推廣到下面的 n 事件的情形

【**定義**】 n 個事件 A_1，A_2，……，A_n 爲相互獨立，若且唯若對 $k = 2$，3，…

$\cdots n$，我們得到：

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots\cdots P(A_{i_k})$$

（總共要列出 2^n-n-1 個條件，見習題3－18）。

【附註】　通常我們不需檢查所有這些條件，因為我們假定獨立（基於我們對於實驗的認識），我們就利用此假設以求 $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots\cdots P(A_{i_k})$。

【例題3－11】圖3－5所示電路，每一繼電器關閉的機率為 P，如果所有繼電器均獨立操作，問端點 L 與 R 間有電流流通的機率為何？

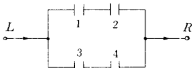


圖3－5

令 A_i 代表事件｛繼電器 i 關閉｝，$i=1,2,3,4$，且令 $E=$｛L 和 R 間有電流｝，因此 $B=\{A_1\cap A_2\}\cup(A_3\cap A_4)$（注意 $A_1\cap A_2$ 和 $A_3\cap A_4$ 並非互斥），於是

$$P(E)=P(A_1\cap A_2)+P(A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$
$$=p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4$$

【例題3－12】如圖3－6之電路，每一繼電器關閉的機率均為 P，且所有繼電器均獨立操作，求 L 與 R 間有電流流通的機率：

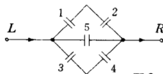


圖3－6

如同例3－11的符號，我們得到

$$P(E)=P(A_1\cap A_2)+P(A_5)+P(A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_5)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)-P(A_5\cap A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)$$
$$=p^2+p+p^2-p^3-p^4-p^3+p^5$$
$$=p+2p^2-2p^3-p^4+p^5$$

在結束本章之前，讓我們考慮一很容易犯的錯誤。

【例題3－13】六個螺栓中，兩個比標準長度為短，若隨機選取兩個螺栓，求抽到較短螺栓的機率為何？

令 $A_i=$｛第 i 個所選的螺栓是短的｝，$i=1,2$。因此我們要求 $P(A_1\cap A_2)$，其正確的解答應是

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{15}$$

很容易犯錯誤，而將其記為

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_2)P(A_1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{15}$$

雖然答案是一樣的，但 $P(A_2)=\frac{1}{5}$ 是錯的，應該是，$P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{5}$，求

求 $P(A_2)$ 應是

$$P(A_2)=P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid A_1')P(A_1')$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

§3－4 概要的探討；條件機率和獨立 (Schematic Considerations；Conditional Probability and Independence)

下面概要性的探討，對於瞭解條件機率的觀念是很有用的。假若事件 A，B 和一樣本空間有關連，各種不同的機率如圖 3 － 7 所示。

因此 $P(A\cap B)=0.1$　　　　$P(A)=0.1+0.3=0.4$

$P(B)=0.1+0.4=0.5$

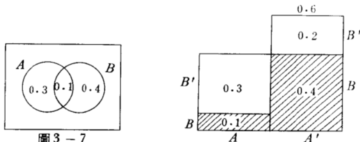


圖 3 － 7

其次，亦可以矩形的面積代表各種機率，如圖 3 － 8 所示，其陰影部份代表事件 B：左側是影代表 $A\cap B$，右邊的黑影代表 $A'\cap B$。

我們要求 $P(B\mid A)$，得先考慮 A；卽 A' 可忽略掉，我們發覺 B 在 A 的比例是 $\frac{1}{4}$（我們利用（3 － 1）式來檢查。$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$），因此 $P(B'A)=\frac{3}{4}$，這條件機率將如圖 3 － 9 所示。

注意一下若 A 已經發生，所有的機率（卽 1）必須有事件 A 有關連，設有機率（卽 0）與 A' 有關的。且在代表 A 的左邊矩形內，單獨的項目值已由圖 3 － 8 改爲圖 3 － 9 的值（加起來是 1，而非 0.4）然而在矩形內的比例仍然沒有改變，（卽 3：1）。

我們也可以上面概要性的探討的觀念，來說明獨立的情形。假若事件 A，B 如圖 3 － 10 所示。其中代表 A 和 A' 的兩個長方形內的比例均爲 3：1，於是 $P(B)=0.1+0.15=0.25$，$P(B\mid A)=0.1/0.4=0.25$。

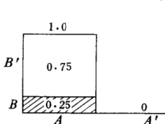


圖 3 － 9

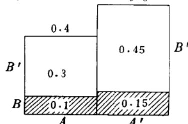


圖 3 － 10

最後，我們也看看圖 3 － 8，也可以計算其他的條件機率：

$P(A \mid B)=\frac{1}{5}$，（因爲$\frac{1}{5}$代表B的面積中被A所佔的比率）

$P(A' \mid B)=\frac{4}{5}$



3－1 瓶 1 中包含 x 枚白球，y 枚紅球，瓶 2 中包含 z 枚白球，v 枚紅球。由瓶 1 中任取一球，置入瓶 2 中，然後自瓶 2 中任取一枚，則此枚爲白色的或然率爲何？

3－2 兩支壞的眞空管和兩支好的混在一塊，眞空管一支一支被試驗，一直到兩支壞的被發現。

(a)最後一支壞的眞空管在第二次查驗時發現的機率如何？

(b)最後一支壞的眞空管在第三次查驗時發現的機率如何？

(c)最後一支壞的眞空管在第四次查驗時發現的機率如何？

(d)將(a)(b)(c)得到的相加，結果令人驚訝嗎？

3－3 一盒子有 4 支壞的，6 支好的眞空管，兩支一起被取出，其中一支被試驗後發覺是好的，問另一支亦是好的機率如何？

3－4 上題中重複取出壞管，直到發現 4 枚壞管爲止。則在(a)第 5 次試驗時，(b)第 10 次試驗時，產生 4 壞管的概率爲何？

3－5 A，B 爲某實驗的兩獨立事件，A 發生概率爲 0.4，A 或 B 發生概率爲 0.6，則 B 發生的概率爲何？

3－6 20 物件中，8 好，12 壞，任意選取，然後一個接一個試驗， 試問在下列情況下各概率爲何？

(a)最初二枚是壞的。 (b)最初二枚是好的。 (c)最初二枚一好一壞。

3－7 瓶 1 和瓶 2 中各有二抽屜，瓶 1 抽屜中一存金幣，一存銀幣，瓶 2 二抽屜中各存一枚金幣，任選一瓶，然後任意打開一抽屜，發現結果爲金幣，求此幣由瓶 2 中得到的概率爲若干？

3－8 袋中三幣，一幣有二“ heads ”，任取一幣連續投 4 次，假如每次出現 head，則此幣爲不正常之概率爲何？

3－9 製碗工廠 A，B，C 機器，各製造 25 %，35 %，40 %的產品， 在過程中，其故障率各爲 5 %， 4 % ， 2 % 任取一碗，發現其爲不良品，則此碗由 A，B，C 三機器中產生的概率各爲何？

3－10 A，B 爲實驗中二事件，假定 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，令 $P(B)=P$。(a) P 爲何值時，A 與 B 互斥。(b) P 爲何值時，A 與 B 獨立。

3－11 機械零件 C_1，C_2，C_3 成直線串聯，令任意安排， 且令事件 R 爲｛C_2

在C_1右側｝事件S爲｛C_3在C_1右側｝，則R與S是否獨立？爲什麼？

3－12 投一骰子，同時任取一張牌，二者爲獨立，求下列情況之機率(a)骰子偶數，牌爲紅花。(b)骰子偶數，或者牌爲紅花色。

3－13 如（1011，1100……）等 二進位數 由0與1兩digits組成，假如一binary由n個digits組成，而每一digits產生錯誤的或然率獨立且爲P，則產生錯誤數字的機率爲若干？

3－14 投n次骰子，問“6”至少出現一次的機率？

3－15 兩個人每人均投擲三枚均勻的硬幣，問他們獲得相同頭數的機率？

3－16 投兩枚骰子，已知出現的點數不同，問有一面是4的機率爲何？

3－17 製造某一產品時，產生某一種缺陷的機率是0.1，第二種缺陷則是0.05（假設此兩缺陷間沒關連）問下列的機率爲何？

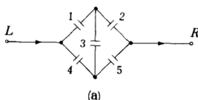
(a)產品沒有兩種缺陷。 (b)產品有缺陷。

(c)已知產品有缺陷，問只有一種缺陷的機率。

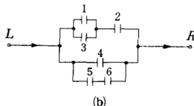
3－18 證實3－8式所需列出的條件數目是2^n-n-1。

3－19 證明若A和B是獨立事件，則A和$\bar{B}$，$\bar{A}$和B，$\bar{A}$和$\bar{B}$也是。

3－20 如下圖所示，每一繼電器close的或然率爲p，同時每一繼電器open or close獨立操作，而與他繼電器無關，則L與R間有電流之p爲若干？



(a)



(b)

3－21 二機器A，B獨立操作，每日故障若干次，下表列出故障的機率分配，考慮下列情形之機率：

故障數目	0	1	2	3	4	5	6
A	0.1	0.2	0.3	0.2	0.09	0.07	0.04
B	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15

(a)A和B有同樣故障數。

(b)故障總數小於4，小於5時又如何。

(c)A故障次數較B多。

(d)B故障次數爲A的二倍。

(e)在已知B至少有二次故障情況下，發現B有4次故障的機率爲何？

(f)二機器故障數目最小者爲3，小於3情形又如何？

(g)二機器故障數目最多者為3，超過3情形又如何？

3－22 顯示以固定A，$P(\frac{B}{A})$滿足本章（方程式1.3）的各種假設以證明本章方程式（3.2）。

3－23 二次行列式中之元素可能為0，或1，而0與1出現的或然率皆為$\frac{1}{2}$，則行列式值為正數的或然率為若干？

3－24 證明$P(A\cap B)=P(A\mid B)\cdot P(B)$可由$A$，$B$二事件推廣到$A$，$B$，$C$三事件，即證明$P(A\cap B\cap C)=P(A\mid B\cap C)\cdot P(B\mid C)\cdot P(C)$。

3－25 某電子裝置包含A，B二附屬體系。

已知　P（A故障）$=0.20$　，　P（只有B故障）$=0.15$

P（A和B均故障）$=0.15$

求下面的機率為何？

(a)P（A故障｜B已發生故障）＝？　(b)P（只有A故障）＝？

3－26 根據所抽出的兩片糖果的事實決定其包裝是type A或type B以完成3－2節中例題的分析。

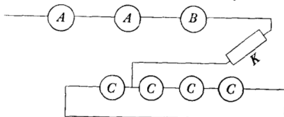
3－27 不論何時，當實驗進行時特別事件A發生的機率為0.2，重複進行實驗一直到A發生，問需重複四次的機率？

3－28 假設一機械含N支眞空管，缺一不可，為了找出一支壞掉的眞空管我們連續地更新每一支。如果眞空管用損的機率均為p，問需要查驗N支眞空管的機率為何？

3－29 證明：如果$P(A\mid B)>P(A)$，則$P(B\mid A)>P(B)$

3－30 眞空管來自三家廠商的機率分別是$p_1=0.25$，$p_2=0.50$，$p_3=0.25$。某段時間眞空管能正常操作的機率分別是0.1，0.2，0.4。試問隨意選取的一支眞空管能正常操作的機率為何？

3－31 一電子系統如圖3－12所示。type A的開關有兩個，type B 1個，type C 4個。如果開關A，B，C發生故障的機率分別是0.3，0.4和0.2且它們獨立操作，問電路故障不能與鍵K消失的機率為何？



3－32 系統實驗，每一試驗的overload的可能性為0.4，計算系統在三獨立試驗中將停止操作的或然率為何？假設1，2，3三

試驗的失敗或然率各爲0.2，0.5，0.8。

3－33 4無線電信號，連續放射，假如接收時互不干擾，且或然率各爲0.1，0.2，0.3，0.4，試計算k信號收到之或然率$k=0$，1，2，3，4

3－34 下面是某業餘家，對天氣的預測法，每天可歸類爲"乾"或"濕"。若給定某一天，則這天與前一天的天氣相同的概率爲常數p（$0<p<1$）。假設一月一日的天氣是"乾"的機率爲β求β_n：第n天爲乾的概率(以p及β表之。求$\lim_{n\to\infty}\beta_n$之值。

3－35 某城市有三種報紙A，B，C。據最近調查：20％的人閱讀A，14％閱C，8％閱A和B，5％閱A和C，2％閱A，B和C，隨機選一成年人，計算下列機率。

(a)他不閱報。(b)他只閱一種報紙。(c)若知道他至少閱一種報紙，問他至少閱讀A和B。

3－36 一均勻硬幣投$2n$次，(a)求正、反兩面次數相同之機率。(b)證明(a)中之機率是n的漸減函數。

3－37 瓶1，瓶2，瓶3……瓶n，每一包含α個白球和β個黑球，從瓶1中取一球置於瓶2中，然後從瓶2中取出一球置於瓶3中……最後從瓶n中選一球，假如第一次傳遞之球爲白球，則最後選出一球亦爲白球的或然率爲何？當$n\to\infty$時又如何？

3－38 瓶1中有α白球及β個黑球。瓶2中有β個白球，α個黑球，從兩瓶中選一球再放回原瓶中。若所取者爲白球，則下一次由瓶1中選。若所取者爲黑球，則下一次由瓶2中選。如此繼續之。若第一球由瓶1中取，問P_n（第n個球爲白球之機率）爲何？並求$\lim_{n\to\infty}P_n$之值。

3－39 某印刷機可印n個字母：α_1，α_2，……，α_n，分別由不同電脈動來操作。假設印字母正確的機率爲常數p，且彼此間爲獨立。隨機由幾個脈動中取出一種輸入機器兩次均印得α_1。試計算此機率。



3－1

【解】

(a)設瓶1中取出白球，其機率爲$\frac{x}{x+y}$，加入瓶2後，此時從瓶2中取出白球或然率爲$\frac{+z+1}{z+v+1}$。

∴此種情況下取出之機率爲$\frac{x}{x+y}\cdot\frac{z+1}{z+v+1}$。

(b)設瓶1中取出紅球，其機率爲$\frac{y}{x+y}$，加入瓶2後，此時白球取出的

機率爲 $\frac{z}{z+v+1}$ 。

∴此種情況下取出之機率爲 $\frac{z}{z+v+1}\cdot\frac{y}{x+y}$ 。

⇒總和 $P=\frac{x}{x+y}\cdot\frac{z+1}{z+v+1}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{z}{z+v+1}$

3－2

【解】 (a)第二次試驗即得二壞管子，故樣本空間有 $\binom{4}{2}$ ，而在二壞管子中取二之組合爲 $\binom{2}{2}$ 。

$$\therefore P=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{4\times 3}=\frac{1}{6}$$

(b)即在前兩次試驗取出一好一壞，在剩下的二個中，取出壞的機會爲 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

$$\therefore P=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(c)即在前兩次試驗取出二好，一壞；故樣本空間有 $\binom{4}{3}$ 。

$$\therefore P=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}}\times 1=\frac{1}{2}$$

(d) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$

∴試驗的次數，爲二次或三次或四次其中之一，不可能有其他情況產生。

3－3

【解】 已知一枚爲好的，剩下 5 好 4 壞，所以另一枚也是好的機率爲 $\frac{5}{5+4}=\frac{5}{9}$ 。

3－4

【解】(a)(a)即在前 4 次試驗，取出 3 枚壞管，1 枚好管；而在剩下的管子中取出壞管的機率爲 $\frac{1}{6}$ 。

－

$$\therefore P=\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{9}}\times\frac{1}{6}=\frac{4\times6\times24}{10\times9\times8\times9}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{105}$$

(b)即在前 9 次試驗，取出 3 枚壞管，1 枚好管，而在剩下的唯 1 管子中，取出壞管的概率為 1 。

$$\therefore P=\frac{\binom{6}{6}\binom{4}{3}}{\binom{10}{9}}\times 1=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

3－5

【解】 $\because A$，B 獨立

$\therefore P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0.6=0.4+P(B)-0.4P(B)$

解得 $P(B)=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$

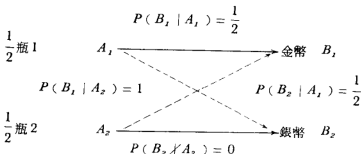
3－6

【解】 (a) $\frac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{12\times11}{20\times19}=\frac{33}{95}$ (b) $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{8\times7}{20\times19}=\frac{14}{95}$

(c) $\frac{\binom{8}{1}\binom{12}{1}}{\binom{20}{2}}=\frac{8\times12\times2}{20\times19}=\frac{48}{95}$

3－7

【解】



$P(B_1\cap A_1)=P(A_1)\times P(B_1 | A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(B_1\cap A_2)=P(B_1 | A_2)\times P(A_2)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$P(B_2\cap A_2)=\frac{1}{2}\times 0=0$

$P(B_2 \cap A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

∴金幣由瓶 2 取出之機率爲

$$\frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

3－8

【解】　設Coin Ⅰ不公平

$\frac{1}{3}C_1 \xrightarrow{p=1}$

$\frac{1}{3}C_2 \xrightarrow{p=\frac{1}{16}}$　　A事件：$\{H, H, H, H\}$

$\frac{1}{3}C_3 \xrightarrow{p=\frac{1}{16}}$

$\therefore P(A) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$

$$P(C_1 \mid A) = \frac{P(C_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{9}$$

3－9

【解】　$A: 0.25 \times 0.05 = 0.0125$　　$B: 0.35 \times 0.04 = 0.0014$

$C: 0.4 \times 0.02 = 0.008$　　D : event {　不良品　}

$P(D) = 0.0125 + 0.014 + 0.008 = 0.0345$

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.0125}{0.0345} = 0.362$$

$$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.014}{0.0345} = 0.406$$

$$P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.008}{0.0345} = 0.232$$

3－10

【解】　(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\because A \cap B = \phi$，$\therefore P(A \cap B) = 0$

$\therefore P(A \cup B) = 0.7 = P(A) + P(B) = 0.4 + P$

$\therefore P = 0.3$

(b) $\because A$，B獨立

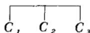
$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

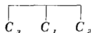
$$P(A \cup B) = 0.7 = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$= 0.4 + P - 0.4P$$

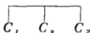
解得 $P = 0.5$

3－11

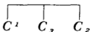
【解】 R事件有3種情形

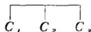


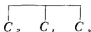




S事件亦有3種情形

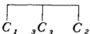


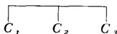




$\therefore P(R) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ， $P(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

又$R \cap S$有2種情形





令$P(R) \cdot P(S)$ $\therefore P(R \cap S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ， $\neq P(R \cap S)$， 故不獨立

3－12

【解】 (a) $\frac{3}{6} \times \frac{26}{52} = \frac{1}{4}$

(b)實驗之樣本空間爲

{（奇黑），（奇紅），（偶黑），（偶紅）}

$\therefore P = \frac{3}{4}$

3－13

【解】 number 正確⇒必須所有digits 正確

$\Rightarrow (1-p)^n$

∴產生錯誤number 的機率爲 $1-(1-p)^n$

3－14

【解】 "6"不出現之p爲 $(1-\frac{1}{6})^6 = (\frac{5}{6})^6$

∴至少出現一次爲 $1-(\frac{5}{6})^6$

3－15

【解】 擲三幣有 $2^3 = 8$ 種情形。

③　HHT, THH, HTH　　二"正面"　$\rightarrow \frac{3}{8}$

①　TTT　　無"正面"　$\rightarrow \frac{1}{8}$

①　$HHHH$　　三"正面"　$\rightarrow \frac{1}{8}$

③　HTT, THT, $TTTH$　　一"正面"　$\rightarrow \frac{3}{8}$

$\therefore$ 兩人得同樣正面之 $p = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$

3－16

【解】 樣本空間：$6 \times 5 = 30$

一面爲"4"的可能性 $2(1 \times 5) = 10$

$\therefore p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

3－17

【解】 (a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.05 \times 0.1 = 0.005$

$\therefore$ (a)之解爲　$1 - 0.05$

(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.1 + 0.05 - 0.005 = 0.145$

(c) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.145 - 0.005 = 0.14$

3－18

【解】 條件爲 A_1，A_2，……，A_k 爲互相獨立。

${}_nC_2 + {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots\cdots + {}_nC_n$

由二項式定理 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots\cdots {}_nC_n = 2^n$

而 ${}_nC_0 = 1$　，　${}_nC_1 = n$

$\therefore 2^n - n - 1$

3－19

【解】 (a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B} \mid A) = P(A)[1 - P(B \mid A)]$

$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B})$

(b) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$　同(a)

(c) $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= 1 - P \cap A \cup B) = P(A \cup B)$$
$$= P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

故$\overline{A}$和$\overline{B}$爲獨立事件。

3－20

【解】 (a) $P(A) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_5)$
$+ P(A_4 \cap A_3 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5)$
$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_4 \cap A_5 \cap A_1 \cap A_3)$
$- P(A_4 \cap A_5 \cap A_3 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$
$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$
$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

由於互爲獨立

$\therefore$ 上式$= P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_4) \cdot P(A_5) + \cdots\cdots$
$= 2p^2 + 2p^3 + 2p^5 - 5p^4$

(b) $P = P(C_1 \cap C_2) + P(C_3 \cap C_2) + P(C_4) + P(C_5 \cap C_6)$
$- P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_4)$
$- P(C_1 \cap C_2 \cap C_5 \cap C_6) - P(C_3 \cap C_2 \cap C_4)$
$- P(C_3 \cap C_2 \cap C_5 \cap C_6) - P(C_4 \cap C_5 \cap C_6)$
$+ P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_5 \cap C_6)$
$+ P(C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6) + P(C_1 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6)$
$- P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6)$

由於互爲獨立

$\therefore$ 上式$= P(C_1) \cdot P(C_2) + P(C_3) \cdot P(C_2) + \cdots\cdots$
$= p + 3p^2 - 4p^3 - p^4 + 3p^5 - p^6$

3－21

【解】 (a) $0.1 \times 0.3 + 0.2 \times 0.1 + \cdots\cdots = 0.1255$

(b)總數小於 5 時

		AB	AB	AB	AB	AB
$0.1 \times 0.1 = 0.01$	←	0 4	1 3	2 2	3 1	4 0
$0.1 \times 0.1 = 0.01$	←	0 3	1 2	2 1	3 0	
$0.1 \times 0.1 = 0.01$	←	0 2	1 1	2 0		
$0.1 \times 0.1 = 0.01$	←	0 1	1 0			
$0.1 \times 0.3 = 0.03$	←	0 0				

將上列 15 個或然率相加卽得

總數小於 4 時

		A B	A B	A B	A B
$0.1\times0.1=0.01$	←	0 3	1 2	2 1	3 0
$0.1\times0.1=0.01$	←	0 2	1 1	2 0	
$0.1\times0.1=0.01$	←	0 1	1 0		
$0.1\times0.3=0.03$	←	0 0			

將上列10個或然率相加即得

(c)

A B	A B	A B	A B	A B	A B
6 5	5 4	4 3	3 2	2 1	1 0
6 4	5 3	4 2	3 1	2 0	
6 3	5 2	4 1	3 0		
6 2	5 1	4 0			
6 1	5 0				
6 0					

查表將上列21個或然率相加即得

(d)

A	B		
3	6	→	$0.2\times0.15=0.03$
2	4	→	$0.3\times0.2=0.06$
1	2	→	$0.1\times0.1=0.01$ (+
			0.10

(e) D事件：{ B已至少有2故障數}

$P(D)=P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$

$=0.1+0.1+0.1+0.15+0.15=0.6$

E事件：{ B剛好有4故障}　$E\subset D$

$P(E)=0.1$

$$P(E\mid D)=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}=\frac{P(E)}{P(D)}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}$$

(f)(1)最小數目爲3

查表將7個P相加即得

A	B	A	B
3	3	4	3
3	4	5	3
3	5	6	3
3	6		

(2)最小數目小於3，可能爲0.1，2

A	B	A	B
0	0	1	0
0	1	2	0
0	2	3	0
0	3	4	0

最小數目爲0

查表13P相加即得

A	B	A	B
0	4	5	0
0	5	6	0
0	6		

（+

A	B	A	B
1	1	2	1
1	2	3	1
1	3	4	1
1	4	5	1
1	5	6	1
1	6		

最小數目爲1
查表11 P 相加卽得

（+

A	B	A	B
2	2	3	2
2	3	4	2
2	4	5	2
2	5	6	2
2	6		

最小數目爲2
查表9 P 相加卽得

（+

將以上33個或然率相加，卽得最小數目小於3之 P

(g)(1)

A	B	A	B
3	0	0	3
3	1	1	3
3	2	2	3
3	3		

最大數目爲3
查表7或然率相加卽得

（+

(2)同理可得極大數爲4，5，6的或然率相加卽得。

3－22

【解】 (a) $\because P(B \mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\because P(A)\geq P(A\cap B)$ ， $\therefore 0\leq P(B\mid A)\leq 1$

(b) $\because S=\bigcup\limits_{i} B_i$

$\sum\limits_{i} P\left(\dfrac{B_i}{A}\right)=1$ ， $\therefore P(S\mid A)=1$

(c) $P(B_1\cup B_2\mid A)=\dfrac{P[(B_1\cup B_2)\cap A]}{P(A)}$

$$= \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) - P(B_1 \cap B_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} \quad \because B_1 \cap B_2 = \phi$$

$$= P(B_1 | A) + P(B_2 | A) \quad \therefore P(B_1 \cap B_2 \cap A) = 0$$

(d)利用(c)再用歸納法可證明

$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots\cdots / A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) + \cdots\cdots$

若　$B_i \cap B_j = \phi$　　　$i = j$

3－23

【解】　二次行列式$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$值為$ad - bc > 0$

所以值為正的唯一可能情形　　$ad = 1$，$bc = 0$

∴可能的二次行列式為

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore P = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$

3－24

【解】　$P(A \cap B \cap C) = P[A \cap (B \cap C)]$

$= P(A | B \cap C) \cdot P(B \cap C)$

$= P(A | B \cap C) \cdot P(B | C) \cdot P(C)$

3－25

【解】　(a) $P(A fails \mid B has\ failed) = P(A | B)$

$\because P(B \cap A) = P(B / A) \cdot P(A)$

$= P(B / A) \cdot (1 - 0.20) = 0.15$

∴解得$P(B / A) = \frac{0.15}{0.80}$

$\because P(B) = P(B / A) P(A) + P(B / A) P(A)$

$= \frac{0.15}{0.20} \times 0.20 + \frac{0.15}{0.80} \times 0.80 = 0.30$

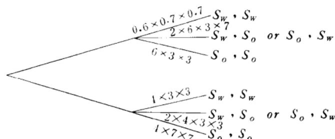
$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2}$

(b) $P(A fails\ alone) = P(A \cap \bar{B})$

$\therefore P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= 0.2 - 0.15 = 0.05$

3－26



$P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.4$ ， $P(S_w \mid B) = 0.3$

$P(S_o \mid B) = 0.7$ ， $P(S_w \mid A) = 0.7$ ， $P(S_o \mid A) = 0.3$

$$P(A \mid S_w , S_w) = \frac{P(S_w , S_w \mid A) \cdot P(A)}{P(S_w , S_w \mid A) P(A) + P(S_w , S_w \mid B) \cdot P(B)}$$

$$= \frac{0.6 \times 0.7 \times 0.7}{0.6 \times 0.7 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3 \times 0.3} = \frac{49}{55}$$

$$P(S \mid S_w , S_w) = \frac{P(S_w , S_w \mid B) \cdot P(B)}{P(S_w , S_w \mid B) \cdot P(B) + P(S_w , S_w \mid A) \cdot P(A)}$$

$$= \frac{0.036}{0.294}$$

其他如 $P(A \mid S_w , S_o)$ 　　$P(A \mid S_o , S_o)$

及 $P(B \mid S_w , S_o)$ 　　$P(B \mid S_o , S_o)$

亦可用同法，以貝氏定理解之

3－27

【解】 即前3次A不發生

$\therefore (1 - 0.2)^3 \times 0.2 = 0.1024$

3－28

【解】 $(1 - P)^{N-1} \cdot p$

3－29

【解】

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} > \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

故得證

3－30

【解】 事件A：{ *tube function* }

$$\left.\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix}\right\} \quad a\ \ aprtiton$$

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$

$= 0.1 \times 0.25 + 0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.25$

$= 0.025 + 0.1 + 0.1 = 0.225$

3－31

【解】 A_1，A_2，B 任一損壞皆爲所述情況 C_1 或者 C_2，C_3，C_4 中至少有一損壞，亦構成此情況。

$\therefore P = 1 - P$〔A_1，A_2，B *good* 且（C_1 *good* 或 C_2，C_3，C_4 *all good*）〕

$= 1 -$〔P（A_1，A_2，B *good*）$\times P$（C_1 *good* 或 C_2，C_3，C_4 *all good*）〕

$= 1 -$ {P（A_1，A_2，B *good*）$\times$〔P（C_1 *good*）$+ P$（C_2，C_3，C_4 *good*）$- P$（C_1，C_2，C_3，C_4 *all good*）〕}

$= 1 - [(0.7)^2 \times 0.6 \times [0.8 + (0.8)^3 - (0.8)^4]]$

$= 1 - 0.2268 = 0.6732$

3－32

【解】 $0.6 \times 0\ 8$ 　1 *th trial succeed*

0.5×0.6 　2 *nd trail succeed*

0.2×0.6 　3 *nd trail succeed*

$\therefore$ 3 *trial all function*

$= 0.6 \times 0.8 \times 0.5 \times 0.6 \times 0.2 \times 0.6 = 0.01728$

$\therefore$停止操作的機率 $= 1 - 0.01728$

3－33

【解】 $k = 0$ 　$P(E) = (1 - 0.1)(1 - 0.2)(1 - 0.3)(1 - 0.4)$

$= [0.9 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.6]$

$k = 1$ 　$P(E) = [0.1 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.6 + 0.2 \times 0.9 \times 0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.6 + 0.4 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.7]$

$k = 2$ 　$P(E) = [0.1 \times 0.2 \times 0.7 \times 0.6 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.4 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 \times 0.4 + 0.1 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.6 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.4]$

$k = 3$ 　$P(E) = [0.1 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.2 \times 0.7 \times 0.4 + 0.1 \times 0.8 \times 0.3 \times 0.4 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.4]$

$k=4 \quad P(E)=0.1\times 0.2\times 0.3\times 0.4$

3－34

【解】 $\beta_1=\beta$ ……………………………………(1)

$\beta_n=p\beta_{n-1}+(1-\beta_{n-1})(1-p)$ ……… (2)

由(2) $\beta_n=(2p-1)\beta_{n-1}+(1-p)$ ……… (3)

$\therefore \beta_n=\dfrac{1}{2}+A(2p-1)^n$ 代入(1)

$\dfrac{1}{2}+A(2p-1)=\beta_1=\beta \quad , \quad A=\dfrac{2\beta-1}{2(2p-1)}$

$\therefore \beta_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\beta-1}{2}(2p-1)^{n-1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{1}{2}$

3－35

【解】 無解

3－36

【解】 (a) $P(n)=\binom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^n}$

(b) $\dfrac{p(n)}{p(n+1)}=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)(n!)}\ \dfrac{2^{n+2}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$

$=\dfrac{2^2(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)}>1$

$\therefore P(n)>p(n+1)$ 即即 $P(n)$ 是 n 的漸減函數。

3－37

【解】 $P_n(w)=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}P_{n-1}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+1}(1-p_{n-1})$ ……………(1)

$P_1(w)=1$ ……………………………………………………(2)

由(1)得 $P_n=p_{n-1}\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\right)+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$ ………………… (3)

由(3) $P_n=A\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\right)^n+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ………………………… (4)

由(1)(4) $\dfrac{A}{\alpha+\beta+1}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=P_1=1$

$\therefore \quad A=\dfrac{\beta(\alpha+\beta+1)}{\alpha+\beta}$ 代入(4)

$P_n=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{1}{\alpha+\beta+1}\right)^{n-1}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

又 $\lim_{n\to\infty} P_n = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

3－38

【解】

$$p_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$p_n = (p_{n-1})\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) + (1-p_{n-1})\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2) $p_n = p_{n-1}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ ………………(3)

由(3) $p_n = A\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n + \dfrac{1}{2}$ ……………………………(4)

由(4)(1)　$A\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{1}{2} = p_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$\therefore A = \dfrac{1}{2}$　代入(4)

$$p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n + \frac{1}{2}$$

又 $\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

3－39

【解】(a)取出之脈動爲 α_1 之脈動。

機率爲 $\dfrac{1}{n} \cdot p^2$

(b)取出之脈動作爲 α_1 之脈動。

則機率爲 $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)(1-p)^2$

$$\therefore p = \frac{1}{n}p^2 + \frac{n-1}{n}(1-p)^2$$

第四章　一維隨機變數

§4－1　隨機變數的一般概念 (General Notion of a Random Variable)

在描述一個實驗的樣本空間，我們不能指定各個結果是一個數字。事實上，我們已提過的許多例子裡，並不是實驗的結果都是數量值。例如，分類產品時，我們祇分成兩部份“好的”或“壞的”。同時，我們要觀察24小時區間的溫度時，祇要依據自動溫度記錄器的曲線掃描軌跡即可。但是，在很多實驗中，我們要衡量它並且用一個數字來記錄它。在上面提過的例子裡，我們也能分配一個數字到每一個（非數量）實驗結果。例如，我們能分配給好的產品數字1，壞的產品數字0。我們也可以記錄一天中的最高溫度和最低溫度，或最高與最低的平均溫度。

在以上的說明對於某些問題是很具有代表性的：有許多實驗情況中，我們分配樣本空間 S 中的每一元素 s 給予一個實數 x，那就是 $x=X(s)$ 是從樣本空間對映到實數的函數 X 的值。在這裡，我們將有如下的一個正式的定義。

【定義】　讓 Σ 表一個實驗，S 是與此實驗有關的一個樣本空間，函數 X 分配每一元素 $s\in S$，$X(s)$ 是一個實數，這函數叫做隨機變數。

【 註 】　(a)以上所提的術語是有幾分的不合宜，但却很普遍的被使用採納。我們已盡可能清晰明顯的叫 X 為一個函數，但我們普通却稱 X 為隨機變數。

(b)並不是每一個可想像到的函數都可考慮認為隨機變數。一個要求（雖然不是最普遍的）是對於每一實驗 x，事件 $\{X(s)=x\}$，和每一區間 I，事件 $\{X(s)\in \mathrm{I}\}$，都有滿足基本定理而且定義完善的機率。在應用上通常都不會發生這種情形的困難，所以我們在以後不再提及。

(c)在某些情況下，樣本空間的結果 s 已具有我們想要的記錄的數量特性時，我們僅取 $X(s)=s$ 即可。

(d)我們在以後討論的隨機變數的大部份已不需要指明 X 函數的本性。我們祇關心 X 的值，而不關心 X 的值是如何得來。例如，拋擲兩個硬幣，考慮它的樣本空間，如下：

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$

定義隨機函數 X 如下：X 是拋擲兩次出現人像那面的次數，則 $X(HH)=2$，$X(HT)=X(TH)=1$，$X(TT)=0$。

$S=\varepsilon$ 的樣本空間　　　$R_x=X$ 的可能值

(e)了解一個函數（單一值）的基本要求是非常重要：每一個 $s\in S$ 剛好對應一個值 $X(s)$，可由圖4－1中看出。函數 X 中，不同元素 s

可能對應相同的值。例如，
在(d)中我們可發現X（HT）$=X$（TH）$=1$。

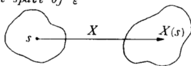


圖4－1

空間R_x是所有X的可能值的集合，有時稱為值空間。在某種意識上可視R_x為其它的樣本空間。（原來的）樣本空間S將符合實驗的非數量的結果，R_x是與隨機變數X有關的樣本空間，描述數量的特性是有趣的。假使$X(s)=S$，我們將可得到$S=R_x$。

雖然我們知道對於一件事情解釋太多會給予教學上的困擾，但我們還是提出兩種方式來考慮隨機變數X。

(a)我們將進行實驗ε，並且產生結果$s\in S$，然後我們推算$X(s)$的值。

(b)我們將使ε獲得結果s，並且（馬上）推算$X(s)$。$X(s)$就是實驗的實際結果，R_x就變成實驗的樣本空間。

對於(a)與(b)之間的差別實在很不容易的分辨，它們比較不重要但我們却必須注意。在(a)中實驗的結果獲得s即可結束，$X(s)$的定數值可被視為某件事情，而不被實驗ε的亂度影響。在(b)中，除非$X(s)$已被確實推算出來，否則不能結束，於是可產生樣本空間R_x。雖然第一個解釋(a)較普遍的使用，但是第二個觀點(b)對我們也有所助益，讀者必須牢記於心。我們較重視的是隨機變數X的值，而不是其形式。因此我們在許多情況都忽視被定義的樣本空間。

【例題4－1】　假設一個燈泡插入一個插座，若燈泡燒毀時則此實驗即告一段落而結束。實驗結果S將如何呢？一種描述S的方法就是記錄燈泡燒毀的日期和時間。例如五月十九日下午4點32分。樣本空間將可以用$S=\{(d,t)\mid d=$日期，$t=$時間$\}$來表示。推測隨機變數X，燈泡亮的時間，是較有興趣。注意$S=(d,t)$是已知，$X(s)$的定數值將不和任何亂度有影響。當s是特定值時，$X(s)$將可完全被測定。

由以上的兩個觀點可應用到此例題上，如下：在(a)中，實驗求得$s=(d,t)$時即結束，然後推算$X(s)$，它涉及簡單的代數運算。在(b)中，只有$X(s)$被求出後實驗才可結束，而$X(s)=107$小時，這可視為實驗的結果。

相類似的分析可應用到一些其它的隨機變數。例如$Y(s)$是燈泡燒毀時的室溫

【例題4－2】　在桌子上拋擲三枚硬幣，硬幣祇要落到桌子上，實驗的“亂度”就算過去，一個單一結果s被描述硬幣落在桌子上的正反面及落在何處。我們通常關心實驗有關的數量特性。例如，我們可以推算：

$X(s)=$出現人像面的次數。

$Y(s)=$任意兩枚硬幣最大的距離。

$Z(s)=$任意硬幣距桌子邊界的最短距離。

假使我們對隨機變數X有興趣，我們可和上例討論一樣，將$X(s)$的估計併入

實驗的描述。因此，與實驗有關的樣本空間是｛0，1，2，3｝，這相當於X的值。雖然我們都採用這觀點，但我們要推算硬幣正反面時必須在實驗亂度消失以後。

【註】 提到隨機變數，我們通常都採用大寫X，Y，Z等。但若提到隨機變數的值時，則通常採用小寫的x，y，z等。這是很重要的分別，學生應注意。例如，我們在某一指明的群衆中隨機抽樣選取一個人，同時量他的身高，我們可以用可能的結果形成隨機變數X。我們可能要問有關X的問題，如$P(X \geq 60)$。但是若我們眞的量了一個人的身高而且確切知道X值，設其爲x，則問$P(x \geq 60)$將沒有意義了，因x不是≥ 60就是≤ 60。這種隨機變數和它的值之間的區別是很重要的，我們在以後會提到。

我們關心與樣本空間S有關的事件，所以我們要討論關於隨機變數X的事件，那就是，值空間的部份集合。有些和S有關的事件而往往又和R_x有關的事件密切相關，由下面的定義可看出。

【定義】 讓ε是一實驗，S是其樣本空間。現定義X是S的隨機函數，R_x是其值空間。讓B是與R_x有關的事件，那就是，$B \subset R_x$。假定A被定義爲

$$A = \{ s \in S \mid X(s) \in B \} \qquad (4-1)$$

換句話說，A是由所有的s所組成，而s滿足$X(s) \in B$（如圖4－2），在這種情況下，A和B是對等事件。

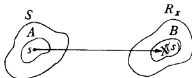


圖4－2

【註】 (a)以較非正式說法，也就是當A和B一起發生則它們就是對等事件。那就是當A發生時，B亦發生，反之亦然。因A發生則有一結果S發生使$X(s) \in B$，因此B也就發生。反之 若B發生則有一值$X(s)$使$s \in A$，因此A亦發生。

(b)要知道在我們定義對等事件裡，A和B與不同的樣本空間有關這點是很重要。

【例題4－3】 考慮抛擲兩枚硬幣，$S = \{HH，HT，TH，TT\}$。令X表人像面出現的次數，因此$R_x = \{0，1，2\}$。令$B = \{1\}$，因$X(HT) = X(TH) = 1$，若且唯若$X(s) = 1$，我們說$A = \{HT，TH\}$與B對等。

我們現有以下很重要的定義：

【定義】 令B表值空間R_x中之一事件，我們定義$P(B)$爲$P(B) = P(A)$，這裡

$$A = \{ s \in S \mid X(s) \in B \} \qquad (4-2)$$

用文字說明也就是：我們定義$P(B)$等於事件$A \subset B$的機率，事件A對等於事件B。

【註】(a)我們假設機率與S內之事件有關，因此由上面的定義使我們能賦予與R_x有關的各事件種種機率而且利用定義在S上之機率表示它。

(b)實際上我們能證明$P(B)$如我們所定義的一樣，然而這牽涉到許多理論上之困難，我們廻避，僅如上進行。

(c)因在解釋4－2式時，事件A，B屬於不同的樣本空間，我們應使用不同的符號。像$P(A)$和$P_x(B)$，但我們不須如此，僅記$P(A)$和$P(B)$，由內容裡卽可清晰的解釋。

(d)與S（原樣本空間）內之事件有關之機率，有時由"我們無法控制的力量"或"自然"來決定。放射質點之放射性物質構造；在某一小時內可排列打電話的許多人之安排，產生熱流的熱量擾動都說明了這點。我們介紹隨機變數X及值空間R_x時，就是誘使機率定義在與R_x有關的事件上，如果與S事件有關之機率被指定，則這些機率也就被嚴格的決定了。

【例題4－4】若例4－3之硬幣是均勻的，則$P(HT)=P(TH)=\frac{1}{4}$，$P(HT, TH)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。事件$\{X=1\}$對等事件$\{HT, TH\}$。利用4－1式，我們有$P(x=1)=P(HT, TH)=\frac{1}{2}$〔$P(HT, TH)$被決定，合乎4－2式的$P(x=1)$之值就沒有選擇的餘地。在此意義下與$R_x$之事件有關的機率也就被誘使了。〕

【註】在X的值空間，我們已建立誘使的機率變數的存在性，我們會發覺隱藏X的變數特性是很方便的。因此我們（如上例）記$P(x=1)=\frac{1}{2}$。這就是樣本空間一事件，$\{HT, TH\}=\{S \mid X(s)=1\}$發生的機率是$\frac{1}{2}$。值空間的事件$\{x=1\}$亦賦予相同的機率，我們將繼續使用$P(x=1)$，$P(x \le 5)$。

這些式子，讀者應認清這些式子之眞正函數。

一旦與值空間R_x內之各事件有關的機率被決定（更精確的說是被誘使）我們時常會忽視原來的樣本空間S，於是上例我們關心$R_x=\{0, 1, 2\}$和其相關的機率（$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$）。假如我們只對於研究隨機變數X的值有興趣的話，則這些由原樣本空間S的機率函數所決定的機率這事實就與我們無關。

在詳細討論與隨機變數有相關的重要觀念時，區分離散和連續隨機變數是很便利的。

§4－2 離散隨機變數 (Discrete Random Variables)

【定義】 令X是隨機變數，若X的值（R_x）的個數有限或可數的無限，則X為一離散隨機變數。亦即，X的值能如下列出x_1，x_2，x_3，………，x_n……。若有限，則序列到某處就結束。若可數的無限，則序列就無限的連續下去。

【例題4－5】 一放射性物質放射α質點，在特定時間內由計數器上觀測，下面的隨機變數是有趣的：

X＝觀測的質點數

X的可能值如何呢？我們假定這些值均非負數整數，即$R_x=\{0，1，2\cdots\cdots，n，\cdots\cdots\}$以前曾遇到的一個困難現可能再度發生。能加以辯論的是某特定（有限）時間區間內，觀測到的質點數不可能多於N，此N可能是一個很大的正整數。因此N的可能值實際上應是：0，1，2，……，N。但考慮上面所給的理想化描述在數學上將較簡單些。事實上，我們假定X的值是可數的無限時，已將問題理論化了。

回憶上一段的討論，離散隨機變數的機率性的描述不致於招致任何困難，我們討論如下：

【定義】 令X是離散的隨機變數，則X的值空間最多可由可數的無限值x_1，x_2，……x_n，……所組成。對於每一x_i有一數值$P(x_i)=P(X=x_i)$與它有關連，此數值稱為x_i的機率。$P(X_i)$，$i=1，2$，……必須滿足下列條件：

(a) $P(X_i)\geq 0$ 對每一i

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i)=1$ （4－3）

上面的變數P稱為X的機率變數（probability function）或點機率函數（Point probability function）。所有序對〔X_i，$P(x_i)$〕，$i=1，2$，……，有時稱為X的機率分配（Probability distribution）。

【註】 (a)$P(X_i)$是與樣本空間S內的事件有關連的機率函數所決定，即$P(X_i)=P〔S\mid X(s)=x_i〕$（見4－1和4－2式）。然而，X值，即R_x，和這些值有關的機率，我們又將使X的變數特性不明顯（見圖4－3）。雖然大多數情況下，事實上數值將由樣本空間S內的機率分配決定，但任何滿足4－3式的$P(x_i)$的集合可描述離散隨機變數的機

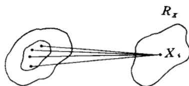


圖4－3

率性。

(b)假使X的值只有有限個X_1，X_2，X_3，……X_N，則$P(x_i)=0$ $\forall_i>N$，4－3式之無窮級數將可變成有限項的和。

(c)我們可以考慮力學方面的類似問題。單位總質量分配在實數軸上而其所有的質量集中在點x_1，x_2，……，則$P(X_i)$代表在X_i點的質量。

(d)機率函數的幾何解釋（圖4－4）是有用的。

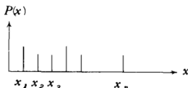


圖4－4

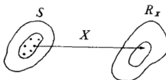


圖4－5

令B為與隨機變數X有關的事件，即$B\subset R_x$（圖4－5）。令$B=\{X_{i_1},X_{i_2},\cdots\cdots\}$，因此

$$P(B)=P[s\mid X(s)\in B]\ (\text{因二事件對等})$$
$$=P[s\mid X(s)=X_{i_j},\ j=1,2,\cdots\cdots]$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X_{i_j}) \qquad (4-4)$$

亦即：事件B之機率等於與B有關的各獨立結果的機率和。

【註】(a)假使離散隨機變數X只有有限個值，X_1，X_2，……，X_N。若每一個值皆相等，則$P(x_1)=P(x_2)=\cdots\cdots=P(x_N)=\dfrac{1}{N}$。

(b)若X為無限項，它們均相等就不可能。因若$P(X_i)=C$，$\forall_i$，則$\sum_{i=1}^{\infty}P(x_i)=1$不可能成立。

(c)在一有限區間內，至多包含有限多個X的值。如果有一區間，不包含任何X的值，則它的機率為0，即$R_x=\{X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n\}$若沒有$X_i\in[a,b]$，則$P[a\le x\le b]=0$。

【例題4－6】　設一電子管被插入插座試驗。假設正反應的機率是$\dfrac{3}{4}$，負反應是$\dfrac{1}{4}$。我們試驗許多這種管子。試驗進行到第一支有正反應的電子管出現為止。定義隨機變數X為，停止實驗所需的試驗次數。與此實驗有關的樣本空間為

$$S=\{+,-+,--+,---+,\cdots\cdots\}$$

X的可能值之1，2，……，n，……（我們考慮樣本空間為理想化）。X

$= n$ 若且唯若前（$n-1$）個管子有負反應，而第 n 個正反應。假定管子彼此不影響，則，

$$P(n)=P(X=n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right),\ n=1,2,\cdots\cdots$$

驗證 $P(n)$ 的值可滿足（4－3）式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(n)=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=1$$

【註】 我們此時利用幾何級數 $1+r+r^2+\cdots\cdots$ 當 $|r|<1$ 時，$\frac{1}{1-r}$ 收斂。這式子以後會時常用到。假使我們要推算 $P(A)$，$A=\{$ 實驗重複做偶數次後停止 $\}$ 利用 4－4 式則有

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(2n)=\frac{3}{16}+\frac{3}{256}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{5}$$

§4－3 二項分配 (The Binomial Distribution)

以後幾章，我們將考慮許多離散隨機變數，現我們先考慮其中之一，來說明許多重要的觀念。

【例題4－7】 分生產線上的產品爲好件 (N) 或壞件 (D)， 若一天的產品中隨機抽取三件加以分類，此樣本空間即 $S=\{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DND, HHH\}$ 。（另一種是 $S=S_1\times S_2\times S_3$ ，而每一 $S_i=\{D, N\}$ ）

我們假定壞件的機率爲0.2，則好件機率爲0.8 。 又設每一產品都是如此。最後假定任何產品分類與其它產品無關。利用這些假定，S 內各結果有關機率是：

$(0.2)^3$，$(0.8)(0.2)^2$，$(0.8)(0.2)^2$，$(0.8)(0.2)^2$，
$(0.2)(0.8)^2$，$(0.2)(0.8)^2$，$(0.2)(0.8)^2$，$(0.8)^3$

我們現討論到底發現多少件壞件。隨機變數 X，它賦予 S 內的每一結果壞件次數。因 X 值空間是 $R_x=\{0, 1, 2, 3\}$ ，我們得 X 之機率分配，$P(X_i)=P(X=x_i)$ 如下：

$X=0$ 若且唯若 NNN 發生

$X=1$，若且唯若 DNN，NDN，NND 發生

$X=2$，若且唯若 DDN，DND，NDD 發生

$X=3$，若且唯若 DDD 發生

因此

$P=(0)=P(X=0)=(0.8)^3$，$P(1)=P(X=1)=3(0.2)(0.8)^2$

$P(2)=P(X=2)=3(0.2)^2(0.8)$，$P(3)=P(X=3)=(0.2)^3$

這些機率和爲1，因其和爲 $(0.8+0.2)^3=1$

【註】上面的討論說明在 R_x 內的機率（此時 $R_x=\{0,1,2,3\}$）如何由定義在樣本空間 S 上的機率決定。因假定 S 內的每一結果有例4－7所給的機率，此假定就決定了 $P(x)$ 的值。

讓我們將上例的觀念加以推廣。

【定義】考慮一個實驗 ε，令 A 是與 ε 有關的事件。假定 $P(A)=p$，則 $P(\bar{A})=1-p$。考慮 ε 之 n 個彼此不相關的重複試驗，因此其樣本空間爲 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\}$，其中每一 a_i 是 A 或 $\bar{A}$ 視第 i 次試驗是 A 或 $\bar{A}$ 發生而定。假設 $P(A)=p$ 對每一重複試驗皆相同。定義隨機變數 X 如下：$X=$ 事件 A 發生的次數。我們稱 X 是個參數是 n 和 P 的二項式隨機變數。顯然它的値是 $0, 1, 2, \cdots\cdots n$（我們也可說 X 有二項分配）。每一獨立 ε 重複稱爲百諾里試驗（Bernouli trials）

定理4－1，令 X 是 n 次試驗的二項式函數，則

$$P(X=K)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0, 1, \cdots\cdots n \quad (4-5)$$

【證明】考慮樣本空間內滿足 $X=K$ 之一特別事件。例如，若前 K 次都是 A 發生，而其餘 $n-K$ 次爲 $\bar{A}$ 發生。

即 $$\underbrace{AAAA\cdots\cdots A}_{K}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A}\cdots\cdots\bar{A}}_{n-K}$$

因所有重複試驗皆獨立，這序列之機率應爲 $p^k(1-p)^{n-k}$。但 $X=K$ 都有這相同機率，而滿足 $X=K$ 的序列有 $\binom{n}{k}$ 個，因由 n 個中取 k 個 A，所以可得4－5式。

【註】(a)爲證明我們的計算，利用二項式定理，我們可得到 $\sum_{k=0}^{n} p(x=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1^n=1$。因 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ 是由二項式 $[p+(1-p)]^n$ 展開得來，我們稱此爲二項分配。

(b)當我們重複試驗一好件或壞件，硬度高於或低於某一標準……等等

。我們在處理樣本空間，在其中我們可定義二項式隨機變數。只要試驗情況很均勻，使事件發生機率保持不變，則可利用上面的模型

(c)若 n 小，則二項分配的每一項很容易求出。二項式機率已經表列出成爲列表（見附錄）

【例題4－8】 假若被嵌入某裝備的電子管使用500小時以上的機率爲0.2，如果試驗20支電子管，問恰有K支超過500小時的機率如何？$K=0,1,2,\cdots\cdots 20$。

如X代表超過500小時的電子管數目，則X有二項分配。於是$P(X=K)$

$=\binom{20}{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k}$。

下列的值可由表4－1讀出。

表 4－1

$P(X=0)=0.012$	$P(X=4)=0.218$	$P(X=8)=0.022$
$P(X=1)=0.058$	$P(X=5)=0.175$	$P(X=9)=0.007$
$P(X=2)=0.137$	$P(X=6)=0.109$	$P(X=10)=0.002$
$P(X=3)=0.205$	$P(X=7)=0.055$	$P(x=k)=0+$ for $k\geq 11$

（其餘的機率均小於0.001）

如我們繪製此機率分配，可得圖4－6所示。我們可簡單的說：二項式機率起先一直遞增到最大值後再遞減。（見習題4－8）

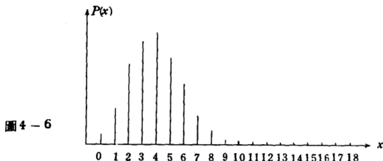


圖4－6

【例題4－9】 操作某機器時，操作者可能會弄錯。假定操作者重複操作此工作，則他錯誤的機率將減小。假定此工作彼此互不影響。現假定：第i次錯誤的機率爲$\frac{1}{i+1}$，$i=1,2,\cdots\cdots n$。如果$n=4$，而我們定義X爲沒有出錯誤的操作次數。注意X並非二次分配，因"成功"的機率並非固定不變。

例如要計算$x=3$，則我們可如此演算：

$x=3$若且唯若恰有一次沒有成功，這一次可能發生在第一次，第二次，第

三次，或第四次，因此

$$P(x=3)=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{5}=\frac{5}{12}$$

【例題4－10】 考慮類似於例4－9的一種情況。這次假定在前n_1次裡沒出錯的機率，每次都是常數P_1。後n_2次每次則爲P_2，$P_2 \le P_1$。令X表$n=n_1+n_2$次中成功的次數。我們如何表出$P(X=k)$呢？如前例所述，X並非二項分配。以下是如何演算$P(x=k)$。

令X表前n_1次成功的次數，Y_2則表示後n_2次成功的次數，因此Y_1和Y_2是獨立的隨機變數且$X=Y_1+Y_2$，於是$X=k$若且唯若$Y_1=r$，$Y_2=k-r$，此地$0\le r\le n_1$，$0\le k-r\le n_2$。

r的限制可改爲$0\le r\le n_1$，$k-n_2\le r\le k$。

因此我們可得

$$max(0, k-n_2)\le r\le min(k, n_1)$$

於是$P(X=k)$

$$\sum_{r=max\{0,k-n_2\}}^{min(k,n_1)}\binom{n_1}{r}P_1{}^r(1-P_1)^{n_1-r}_{n}\binom{n_2}{k-r}P_2{}^{k-r}(1-P)^{n_2-(k-r)}$$

因爲若$b>a$或$b<0$，則$\binom{a}{b}=0$，因此我們可將上面的機率記爲：

$$P(x=k)=\sum_{r=0}^{n_1}\binom{n_1}{r}P_1{}^r(1-P_1)^{n_1-r}\binom{n_2}{k-r}P_2{}^{k-r}$$

$$(1-P_2)^{n_2-k+r} \qquad (4-6)$$

假如，若$P_1=0.2$，$P_2=0.1$，$n_1=n_2=10$且$k=2$，則由上式

$$P(x=2)=\sum_{r=0}^{2}\binom{10}{r}(0.2)^r(0.8)^{10-r}\binom{10}{2-r}(0.1)^{2-r}(0.9)^{8+r}$$

$$=0.27$$

可算出。

【註】 假若$P_1=P_2$，則在這種情況X有二項分配，因此(4－6)式應變成$\binom{n}{k}P_1{}^k(1-P_1)^{n-k}$。爲了證明這個推斷我們注意（因爲$n_1+n_2=n$）

$$P(x=k)=P_1{}^k(1-P_1)^{n-k}\sum_{r=0}^{n_1}\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{k-r}$$

如果要證明上個和等於$\binom{n}{k}$只要比較$(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}=(1+x)^{n_1+n_2}$兩邊$x^k$的係數就行了。

§4－4 連續隨機變數 (Continuous Random Variables)

假如X之值空間是由很多個數組成，如所有$0 \leq x \leq 1$之x，而且如0.01，0.02，0.03，……0.98，0.99，1.00的x所成的集合，對應於每一個這些值有一個負實數$P(x_i) = P(X = x_i)$，$i = 1, 2, \ldots\ldots$，它們的和等於1。這種情況如圖4－7所示。

以前我們已述說若x是0和1間的所有實數值，則將上面的機率敘述理想化，較為簡單。我們假定x能有$0 \leq x \leq 1$之任意值，如果這樣，$P(x_i)$點機率有何影響呢？因x的可能值是不可數的，所以$P(x_i)$變為無意義。我們要做的是將x_1，x_2，……下定義，函數f，對所有$0 \leq x \leq 1$。4－3式的性質將更以$f(x) \geq 0$和$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$。我們如下討論。

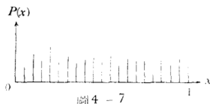


圖4－7

【定義】 若存在一個函數f，我們稱它為x的機率密度函數（probability density function）簡稱（pdf）滿足下列條件：

(a)對所有x而言，$f(x) \geq 0$。

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ （4－7）

(c)對任何滿足$-\infty < a < b < \infty$，我們有

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad (4-8)$$

則我們稱x是一個連續隨機變數。

【註】 (a)實際上我們是說，若x介於(c, d)內，此地c可能是$-\infty$，d可能是∞，則x是一連續隨機變數。我們規定pdf的存在是一個數學的公設，此公設可使計算容易些。在此我們該知道的是當x是一連續隨機變數時，我們已將x理想化了。

(b) $P(c \leq x \leq d)$代表pdf f圖形在$x = c$和$x = d$之間的面積（如圖4－8）。

(c)由以上之述說，對於x中的任何值x_0，$P(X = x_0) = 0$，因$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$。此結果似乎與我們的直覺互相矛盾，然而我們必須體認的是，如果X是介於某區間，則機率為0並非表示“不可能”。因此在連續的狀況，$P(A) = 0$並沒有說$A = \phi$（見定理1－1）。比較不正式說，我們考慮由$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$任取一點。雖然我們可能同意（為了數學上的目的）區間內之每一可想像的點

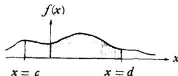


圖4－8

均能做我們實驗的結果，如果事實上我們精確地選取中點，我們將會十分驚訝。當我們利用精確的數學語言陳述這件事時，我們說事件有"零機率"（probability zero）。回想這些註解，如X是連續的話，則下面列出的事實是一樣的：

$P(c \le x \le d)$，$P(c \le x < d)$，$P(c < x \le d)$，和 $P(c < x < d)$

(d)雖然我們不在此地證實各個細節，但我們可以證明出上面對於R_x內之事件所賦予的機率滿足機率的基本公設（1－3式）。我們的樣本空間可取

$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$

(e)如果有一變數f^*滿足$f^*(x) = 0$，$\forall x$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\,dx = k$，此$k$是正實數（不一定等於1），則$f^*$沒有滿足$pdf$的條件。然而我們可定義一新變數$f$為$f(x) = \dfrac{f^*(x)}{k}$，$\forall x$，則$f$滿足$pdf$的所有條件。

(f)如果x的值只落在（a，b）區間，對任何不屬於（a，b）的x，可令$f(x) = 0$。於是pdf對所有x都有定義而且亦滿足$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$。當$pdf$只限於某區間時，則區間外的$x$值，令$pdf$等於0。

(g)$f(x)$並不代表任何事物的機率。如$P(x = 2) = 0$，但$f(2)$並不代表此機率。只有在兩區間做變數的積分才能得到機率。然而$f(x)\triangle x$亦有所意義。由均值定理（mean－valued Theorem）

$$P(x \le X \le x + \triangle x) = \int_x^{x+\triangle x} f(s)\,d(s) = \triangle x f(\xi),$$

$$x \le \xi \le x + \triangle x$$

如$\triangle x$很小，$f(x)\triangle x$近似於$P(x \le X \le x + \triangle x)$

(h)當我們寫$P(c < x < d)$時，我們的意思通常是$P[c < X(s) < d]$，這對等於$P(s \mid c < X(s) < d)$這是因為兩事件是對等的。由（4－8）式。

$$P[s \mid c < X(s) < d] = \int_c^d f(x)\,dx$$

(i)在連續的情況裡，我們可以再考慮力學的類似問題。設我們有一單位的總質量，連續地分配在區間$a \le x \le b$上，則$f(x)$代表在x點的質量密度而$\int_c^d f(x)\,dx$代表區間$c \le X \le d$所含的總質量。

【例4－11】上面的討論連續隨機變數時，我們假定pdf存在，我們要考慮一個問題的例子，在這例子裡我們可藉著對隨機變數的機率理論而決定pdf。假

定在（0，1）間任選一點，令X表隨機變數，它的值就是所選取的點的X座標。

【假定】 如果 I 是（0，1）內的任何區間，則 $prob$〔$X\in$ I 〕與 I 的長度 L(I)成比例，亦即 $prob$〔$X\in$ I 〕$= K\,L$(I)，其中K是比例常數(取 I ＝（0，1）；則L（10，1）＝1 且$prob$〔$X\in$（0，1〕＝1，所以$K=1$）。

顯然X介於（0，1）區間，它的pdf呢？此即我們能不能找到一個函數f，使得

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx\ ?$$

如果$a<b<0$或$1<a<b$則$P(a<X<b)=0$，因此$f(x)=0$。
如果$0<a<b<1$，則$P(a<X<b)=b-a$，因此$f(x)=1$。
於是我們可知：

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他值\end{cases}$$

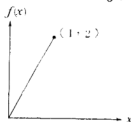


圖4－9

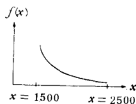


圖4－10

【例4－12】 假設X是一連續隨機變數（見圖4－9），令$pdf\ f$爲

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0 & 其他值\end{cases}$$

顯然，$f(x)\geq 0$和$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_0^1 2x\ dx=1$。要算$P(X\leq\frac{1}{2})$，我們祇須計算積分$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x)\,dx=\frac{1}{4}$。

第三章討論的條件機率觀念可以引用到隨機變數。例如：在上例裡我們可以計算$P(X\leq\frac{1}{2}\mid\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{2}{3})$。直接利用條件機率的定義，我們有

$$P(X\leq\frac{1}{2}\mid\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{2}{3})=\frac{P(\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{1}{2})}{P(\frac{1}{3}\leq X\leq\frac{2}{3})}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x\,dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x\,dx} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{12}$$

【例4－13】 令X爲某種燈泡的壽命（以小時計），假定X是連續變數，其 *pdf* f爲

$$f(x) = \frac{a}{x^3}, \qquad 1500 \le x \le 2500,$$
$$= 0, \qquad 其他值$$

（那就是，我們假定$\{x < 1500\}$和$\{x > 2500\}$的機率爲0）要計算常數a，我們運用$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$的條件，因此$\int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3}\,dx = 1$。由此可得$a = 7031250$。$f$的圖形如圖4－10所示。

下一章我們將仔細的研討許多重要的離散的或連續的隨機變數。我們由我們對肯定模型的使用知道有些函數比另外其他函數來得重要。例如：線性，二次數，指數，三角函數在描述肯定模型時佔主要角色。在發展機率模型的過程中，我們將發現某些隨機變數特別重要。

§4－5累積分佈函數 (Cumulative Distribution Function)

我們要介紹在本章裡的其他重要觀念。

【定義】 令X是一離散或連續的隨機變數。我們定義$F(x) = P(X \le x)$爲X的累積分佈函數，以後我們簡記爲 *cdf*。

【定理4－2】 (a)假使X是離散隨機變數，則

$$F(x) = \sum_j P(x_j) \qquad (4-9)$$

這裡我們對所有滿足$x_j \le x$的下標j求總和。

(b)假使X是連續隨機變數且有*pdf* f，則

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds \qquad (4-10)$$

【證明】 兩個結論均可由定義求得。

【例4－14】 假定X值是0，1，2 的機率分別是$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$和$\frac{1}{2}$，則

$$F(x) = 0 \qquad 假使\ x < 0$$
$$= \frac{1}{3} \qquad 假使\ 0 \le x < 1$$
$$= \frac{1}{2} \qquad 假使\ 1 \le x < 2$$

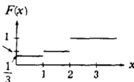


圖4－11

$= 1$　　　　　假使 $x \geq 2$

（在描述不同的區間時要指明端點是否被包括是很重要的）F 的圖形（見圖 4－11）。

【例4－15】假設 X 是連續隨機變數，其 pdf 爲

$$f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$$
$$= 0 \qquad 其他值$$

因此 cdf F 等於

$$F(x) = 0 \qquad 假使 x \leq 0，$$
$$= \int_0^x 2s\,ds \qquad 假使 0 < x \leq 1，$$
$$= 1 \qquad 假使 x > 1，$$

其圖如（圖4－12）所示。

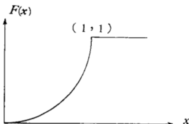


圖4－12

圖4－11和圖4－12就下列的意義而言很具代表性：

(a)假使 X 是離散隨機變數且只有有限個值，則 cdf F 的圖形是由水平線所組成〔稱爲階梯函數（step function）〕。除了在 X 的可能值 x_1，x_2，……，x_n 以外，函數 F 是連續的。在 X_j 值處，圖形有一"跳動"，其大小是 $P(x_j) = P(X = xj)$。

(b)假使 X 是連續機變數，則對所有 x 而言，F 是連續函數。

(c) cdf F 對所有 x 均有定義，這是我們要考慮它的一個重要理由。

現有兩個 cdf 的重要性質我們將總結在下個定理裡。

【定理4－3】 (a) F 不是遞減函數。即是，$x_1 \leq x_2$，則有 $F(x_1) \leq F(x_2)$

(b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ 和 $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$〔我們通常記爲 $F(-\infty) = 0$，$F(\infty) = 1$〕

【證明】 (a)定義事件 A 和 B 如下：$A = \{X \leq x_1\}$，$B = \{X \leq x_2\}$，則 $x_1 \leq x_2$，將有 $A \subset B$，由定理1－5，顯然 $P(A) \leq P(B)$，這就是所要的結果。

(b)在連續條件下將有：

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = 0，$$

$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x}f(s)\,ds=1$$

離散的情況與此類似。

cdf 的重要是有理由的，尤其是當我們考慮連續隨機變數時更是如此，因當我們考慮連續隨機變數時，由於 $P(X=x)=0$，因此我們無法藉計算 $P(X=x)$ 來研討 X 的機率行為。但是我們可以求 $P(X\leq x)$ 的值，然後利用下個定理獲得 X 的 pdf。

【定理 **4－4**】 (a)令 F 是一連續隨機變數的 cdf。此隨機變數的 pdf 是 f。則對 F 中的可微分的 X 而言：

$$f(x)=\frac{x}{dx}F(x)$$

(b)令 X 是離散隨機變數，其可能的值是 x_1，x_2，……x_n……設 $x_1<x_2<\cdots\cdots<\cdots\cdots$。令 F 是 X 的 cdf，則

$$P(X_j)=P(X=X_j)=F(X_j)-F(x_{j-1}) \qquad (4-12)$$

【證明】 (a) $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)\,ds$ 利用微積分基本定理我們可得到 $F'(x)=f(x)$。

(b)因 $x_1<x_2<\cdots\cdots<\cdots\cdots$，我們有

$$F(x_j)=P(X=x_j\cup X=x_{j-1}\cup\cdots\cdots\cup X=x_1)$$
$$=P(x_j)+P(x_{j-1})+\cdots\cdots+P(x_1)$$
$$F(x_{j-1})=P(X=x_{j-1}\cup X=x_{j-2}\cup\cdots\cdots\cup X=x_1)$$

因此 $\qquad =P(x_{j-1})+P(x_{j-2})+\cdots\cdots+P(x_1)$

因此 $F(x_j)-F(x_{j-1})=P(x_j)=P(x=x_j)$

【註】 我們再考慮上面的定理(a)，回想 F 的導函數（derivative）的定義

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{P(X\leq x+h)-P(X\leq x)}{h}$$

若 h 大於0且很小，

$$F'(x)=f(x)\cong\frac{P(x<X\leq x+h)}{h}$$

亦即，$f(x)$ 近乎等於"每單位 h 在區間 $(x，x+h)$ 的機率量"，因此 f 被稱為機率密度函數（probability density function）

【例 **4－16**】 若一連續隨機變數，其 cdf 為 F，

$$F(x)=0 \qquad x\leq 0，$$
$$=1-e^{-x} \qquad x>0$$

則 $F'(x)=e^{-x}$，對 $x>0$，其 pdf f 為

$$f(x) = e^{-x} \qquad x \geq 0$$
$$= 0 \qquad 其它值$$

【註】 有個數學術語我們要注意，此術語雖不統一，但已成了固定化了。當我們提到隨機變數X的機率分配時，如果X是連續，則我們指的是其pdf如X是離散時，我們指的是其機率函數。當我們提到cdf或只稱爲分佈函數時，我們所指的是F，這裡$F(x) = P(X \leq x)$。

§4－6 混合分佈 (Mixed Distributions)

我們以前討論的只限於離散或連續的隨機變數。這兩種型式是重要的，但有時亦會遇到混合型的。即隨機變數X有某些不同值x_1，x_2，……x_n，其機率均大於0。同時X介於區間$a \leq x \leq b$。如此的一個隨機變數的機率分佈可以由混合離散和連續的兩種概念求得。對於每一個x_i，有$P(x_i) \geq 0$，而且$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = P < 1$。然後定義一個函數$f$滿足$f(x) \geq 0$，$\int_a^b f(x)\,dx = 1 - P$。對所有$a$，$b$，滿足$-\infty < a < b < +\infty$而言，

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{\{i\,:\,a \leq x_i \leq b\}} P(x_i)$$

這情況我們就滿足了條件

$$P(s) = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

一混合型的隨機變數的發生可如下敍述：假設我們正在試驗某裝備，令X表操作時間。在大多數的問題中，當X的可能值$x \geq 0$，我們將X描述成一個連續隨機變數。然而，當裝備不操作時其機率大於0，即時間$X = 0$它就不操作。在這情況下，我們要修正我們的模型且賦予$X = 0$一個大於0的機率值。即，$P(X = 0) = p > 0$，且$P(X > 0) = 1 - p$，因此P爲$X = 0$時之分配，pdf f爲$X > 0$的分配。（見圖4－13）

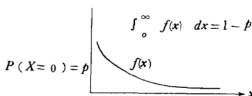


圖4－13

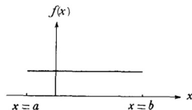


圖4－14

§4－7 均勻分佈的隨機變數 (Uniformly Distributed Random Variables)

在第8章及第9章我們再詳細研討離散及連續的隨機變數。我們已介紹二項式的隨機變數。現我們在此簡扼的介紹一個重要的連續隨機變數。

【定義】　假設X是一連續隨機變數，其所有值介於區間〔a，b〕，這裡a，b都是定量，若X的pdf爲

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a\leq x\leq b$$
$$=0 \qquad \text{其它值} \qquad (4-13)$$

我們就稱X在區間〔a，b〕的均勻分佈。（見圖4－14）

【註】　(a)均勻分佈的隨機變數有一個pdf，其値在兩個定數的區間是常數。爲了滿足$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，這值必須是區間長度的倒數。

(b)均勻分佈的隨機變數就下面的意義而言具有均等的含義。對於任意子區間〔c，d〕，$a\leq c\leq d\leq b$，P（$c\leq X\leq d$）對任何有同樣長度的子區間都有相同的值。

亦即，

$$P(c\leq X\leq d)=\int_c^d f(x)dx=\frac{d-c}{b-a}$$

即只與子區間的長度有關而與子區間的位置無關。

(c)我們現在應很清楚在區間〔a，b〕隨機選取一點的直覺觀念。它的意思就是X均勻分佈在區間〔a，b〕上，所選取點的X座標

【例4－17】在線段〔0，2〕上隨機選取一點，問此點落在〔1，$\frac{3}{2}$〕之間的機率爲何？

令X表此點的座標，則X的pdf是$f(x)=\frac{1}{2}$，$0<x<2$，因此P（$1\leq X\leq\frac{3}{2}$）$=\frac{1}{4}$。

【例4－18】　鋼鐵的硬度H可以設爲均勻分佈在〔50，70〕上的連續隨機變數，因此

$$f(h)=\frac{1}{20} \qquad 50<h<70$$
$$=0 \qquad \text{其它值}$$

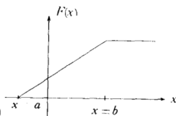


圖4－15

【例4－19】讓我們獲得均勻分佈的隨機變數的cdf的數學式。

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(s)ds$$
$$=0 \qquad \text{假使}x<a,$$
$$=\frac{x-a}{b-a} \qquad \text{假使}a\leq x<b,$$
$$=1 \qquad \text{假使}x=b$$

其圖如（圖4－15）所示。

§4—8 摘要

我們已指出機率模式的發展過程，某些機率必須被下面二種情況之一被認定，一種是實驗證明（例如相關頻率，如例子），另一種是其它的考慮，如基於研究現象的過去經驗。以下的問題對學生必會發生：我們爲什麼不能獲得基於演繹的意義的所有機率？那回答是我們直覺知識是不夠的去獲得所有機率。例如，假使在生產線上每天生產1000 種產品，其中有些是有缺點的。我們現希望在指定的日期知道有缺點的產品在50或少於50的機率。假使我們用生產過程的普通行爲，要獲得有缺點的產品在50或少於50的數量是困難的。無論如何，我們可能指出單一產品有缺點的機率是0.10，（亦即，在過去經驗中我們知道10％ 是有缺點），進一步，我們可期望單一產品有缺點或完美是與其他無關。現在我們可推算產品的機率，亦即$X=$有缺點的數目，

$$P(X\leq 50)=\sum_{k=0}^{50}\binom{1000}{k}(0.10)^{k}(0.90)^{1000-k}$$

在這裡我們可用各種不同方法來計算我們推演的機率，我們祇用直覺或只限經驗來計算那是很困難的。



4—1 某硬幣出現正面的次數是反面的三倍，此硬幣被投擲三次。令X是出現正面的次數，試寫出X的機率分配與 cdf 並圖示兩者。

4—2 一堆物品共25件，其中好的20件，壞的5件。現由這堆物品中隨機選取4件，令X表選中壞的件數，試求X的機率分配，如果：

(a)物品取出後再放回。 (b)物品取出後不再放回。

4—3 假設隨機變數X的值是1，2，3，……且$P(X=j)=\frac{1}{2^j}$，$j=1$，2，……試求：

(a)計算P（X是偶數）。 (b)計算$P(X\geq 5)$

(c)計算P（X爲3的倍數）。

4—4 考慮一個隨機變數X的可能值：0，1，2，……假使$P=(X=j)=(1-a)a^j$，$j=0$，1，2……

(a)當a爲何值時，上個模式方有意義。

(b)證明上式代表一個合法的機率分配。

(c)對任意兩正整數S和t，證明

$$P(X>s+t\mid X>s)=P(X\geq t)$$

4—5 假設機器Ⅰ的每天產量是機器Ⅱ的2倍，機器Ⅰ的產品中壞的佔其產量的4％，而機器Ⅱ的產品壞的佔其產量的2％。假設每天產出的產品互

相混合。由這些混合的產品中選取 10 件樣本，間此樣本含 2 件壞件的機率多少？

4－6 發射火箭一直到成功為止。如果到第五次發射尚不成功，實驗就停下來，檢查裝備。假設發射火箭每次成功的機率是 0.8，且連續的發射互不影響。假定第一次發射要花用 K 元，以後每次都是 $K/3$ 元。當發射成功時，我們可以獲得某種消息，此消息我們假定為 C 元，如果 T 是此項實驗的淨支出，試求 T 的機率分配。

4－7 若 X 如例 4－10 所定義的，試求 $P(X=5)$。假定 $n_1=10$，$n_2=15$，$P_1=0.3$，$P_2=0.2$。

4－8 （二項式機率的性質）在討論例 4－8 時，我們提及形如 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ 之二項式機率。我們記此種機率為 $p_n(k)$。

(a)證明對 $0\leq k<n$，我們有

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)}=\left[\frac{(n-k)}{(k+1)}\right]\left[\frac{p}{(1-p)}\right]$$

(b)利用(a)證明

(i)　$p_n(k+1)>p_n(k)$，假使 $k<np-(1-p)$

(ii)　$p_n(k+1)=p_n(k)$，假使 $k=np-(1-p)$

(iii)　$p_n(k+1)<p_n(k)_0$，假使 $k>np-(1-p)$

(c)證明：如果 $np-(1-p)$ 是整數，則 $p_n(k)$ 對 $k_0=np-(1-p)$ 和 $k_0'=np-(1-p)+1$，為其極大值。

(d)證明：如果 $np-(1-p)$ 不是整數，則當 k 為大於 k_0 之最小整數，$p_n(k)$ 為其極大值。

(e)證明：如果 $np-(1-p)<0$，則 $p_n(0)>p_n(1)>\cdots\cdots>p_n(n)$，而如果 $np-(1-p)=0$，則 $p_n(0)=p_n(1)>p_n(2)>\cdots\cdots>p_n(n)$。

4－9 連續隨機變數 X 的 pdf $f(x)=\frac{x}{2}$，$0<x<2$，做 X 的兩個獨立決定。X 的兩個獨立決定均大於 1 的機率多少？若做 X 的三個獨立決定，恰有兩個大於 1 的機率又多少？

4－10 令 X 代表一電子管的壽命，假設 X 是個連續隨機變數，其 pdf $f(x)=be^{-bx}$，$x\geq 0$。令 $P_j=P(j\leq X\leq j+1)$，證明 P_j 形如 $(1-a)a^j$，且決定 a 的大小。

4－11 連續隨機變數 X，其 pdf $f(x)=3x^2$，$-1\leq x\leq 0$，如果實數 b 滿足 $-1<b<0$，計算 $P(X>b\mid X<\frac{b}{2})$ 的值。

4－12 假設 f 和 g 均是定義在區間 $a\leq x\leq b$ 上的 pdf。

(a)證明 $f+g$ 不是定義在 $a\leq x\leq b$ 上的 pdf。

(b)證明對滿足 $0<\beta<1$ 之 β 而言，$\beta f(x)+(1-\beta)g(x)$ 是定義在區間 $a\leq x\leq b$ 上的 pdf。

4－13 假設圖4－16代表隨機變數 X 的 pdf。

(a) a 與 b 之間的關係。

(b)如果 $a>0$，$b>0$，則 b 為最大值時，你對此值置何評論？（見圖4－16）

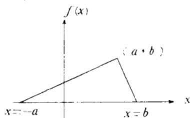


圖4－16

4－14 某混合液，酒精含量 $100X$，可視為隨機變數，這裡 $0<X<1$，其 pdf 為

$$f(x)=20x^3(1-x)\qquad 0<x<1$$

(a)試求 cdf F 且繪其圖形。

(b)計算 $P\left(X\leq\frac{2}{3}\right)$

(c)假定上面混合液售價視酒精含量而定，若 $\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3}$，則每加侖賣 C_1 元，否則賣 C_2 元。如果混合液每加侖成本為 C_3 元，試求每加侖淨利潤的機率分配。

4－15 令 X 是連續隨機變數，它的 pdf 是

$$\begin{aligned} f(x)&=ax, & 0\leq x\leq 1\\ &=a, & 1\leq x\leq 2\\ &=-ax+3a, & 2\leq x\leq 3\\ &=0, & \text{其他值} \end{aligned}$$

(a)試定常數 a 的值。

(b)決定 cdf F 且繪其圖。

(c)若 X_1，X_2，X_3，是 X 的三個獨立觀察值，問三者中只有一個大於1.5的機率。

4－16 假設電纜的直徑 X 為連續隨機變數，其 pdf $f(x)=bx(1-x)$，$0\leq x\leq 1$。

(a)驗證 f 是 pdf，且繪其圖。

(b)試求 X 的 cdf，且繪其圖。

(c)試定 b 的值，使 $P(X<b)=2P(X>b)$。

(d)計算 $P\left(X<\frac{1}{2}\mid\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3}\right)$。

4－17 下列每一個函數均代表連續隨機變數的 cdf。在每一種情況下，若 $x<a$，則 $F(x)=0$，若 $x>b$，則 $F(x)=1$。這裡〔a，b〕是個已指定的區間。在每一種情況下繪 $F(x)$ 的圖形，並決定 pdf f 且繪其圖。並且證

明 f 是個 pdf。

(a) $F(x)=\frac{5}{x}$，$0\leq x\leq 5$

(b) $F(x)=(\frac{2}{\pi})\sin^{-1}(\sqrt{x})$，$0\leq x\leq 1$

(c) $F(x)=e^{3x}$，$-\infty< x\leq 0$

(d) $F(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}$，$-1\leq x\leq 1$

4－18 令 X 代表某電子管的壽命（以小時計）。假使 X 是連續機變數，其 pdf

$f=\frac{k}{x^n}$，$2000\leq x\leq 10,000$　。

(a)當 $n=2$，決定 k 之值。

(b)當 $n=3$，決定 k 之值。

(c)當 n 爲一般值時，決定 k 之值。

(d)電子管在5000小時以前損毀的機率多少？

(e)對(c)繪其 cdf $F(t)$，且決定其數學模式。

4－19 X 是依據一個重複十次的實驗的二項分配的隨機變數，假如 $p=0.3$，試利用附錄內的二項分配表，求下列機率：

(a) $P(X\leq 8)$　(b) $P(X=7)$　(c) $P(X>6)$

4－20 假定 X 均勻分佈在〔$-\alpha$，$+\alpha$〕，$\alpha>0$。如果可能的話，決定 α 的值使下列式子成立：

(a) $P(X>1)=\frac{1}{3}$　(b) $P(X>1)=\frac{1}{2}$

(c) $P(X<\frac{1}{2})=0.7$　(d) $P(X<\frac{1}{2})=0.3$

(e) $P(|X|<1)$　$P(|X|>1)$

4－21 假定 X 均勻分佈在〔0，α〕上，$\alpha>0$，試回答習題 4－20 的問題。

4－22 從一長 L 的線上任取一點，問較短截與長截的長度比少於 $\frac{1}{4}$ 的機率。

4－23 有一工廠每天生產10件玻璃器皿，我們可假定生產壞件的機率爲常數 $p=0.1$。這些器皿被儲存之前先經過檢驗，如果是壞件就抛棄它。假設檢驗失誤的機率是常數 $r=0.1$，令 X 表一天產量中被列爲壞件的件數（假定當天的產品當天檢驗完畢）。

(a)試計算 $P(X=3)$ 和 $P(X>3)$

(b)試表示 $P(X=k)$

4－24 假設某一眞空管的壽命（以小時計）是個連續隨機變數 X，其 pdf 爲

$f(x)=\frac{100}{x^2}$，$x>100$。$f(x)=0$，其它值。

(a)如果有一真空管在150小時後仍沒壞，問其壽命少於200小時的機率？

(b)如果有一裝置裝有3支這樣的真空管，問在150小時後，恰有一支被更換的機率？

(c)最多需要多少支真空管裝入裝置使得150小時以後所有真空管均沒有壞的機率等於0.5？

4－26 一次實驗需要n次獨立試驗，我們可以假定，實驗成功的機率隨試驗次數增加而增加，假若第i次重複成功的機率$=\dfrac{i+1}{i+2}$，$i=1，2\cdots\cdots n$。

(a)問8次重複中至少有3次成功的機率？

(b)問第1次成功發生在第8次重複試驗的機率？

4－27 如例4－10。

(a)計算$P(X=2)$，假使$n=4$。

(b)對任意n，證明$P(X=n-1)=P$(恰有一次沒有成功的試驗)$=\left(\dfrac{1}{(n+1)}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{i}\right)$

4－28 假如隨機變數K均勻分佈在$[0，5]$上，問$4x^2+4xK+K+2=0$的根是實數的機率？

4－29 假設隨機變數X的可能值是1，2，3，……且$P(X=r)=k(1-\beta)^{r-1}$，$0<\beta<1$。

(a)試定常數k之值。

(b)試求此分配的衆數(mode)(亦即使$P(x=r)$最大的r值)。

4－30 一隨機變數X有4個值，它們的機率分別是，$\dfrac{(1+3x)}{4}$，$\dfrac{(1-x)}{4}$，$\dfrac{(1+2x)}{4}$，和$\dfrac{(1-4x)}{4}$，問x該爲何值時才是一個機率分配？

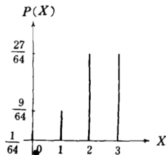


4－1

【解】 $P(\text{正面})=\dfrac{3}{4}$ ，$P(\text{反面})=\dfrac{1}{4}$

$P(X=0)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$

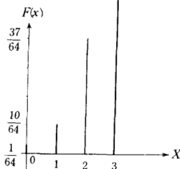
$P(X=1)=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times3=\dfrac{9}{64}$



$P(X=2)=(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}\times 3$

$=\frac{27}{64}$

$P(X=3)=(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$



cdf $F(X=0)=P(X=0)$

$=\frac{1}{64}$

$F(X=1)=p(0)+p(1)=\frac{1}{64}+\frac{9}{64}=\frac{10}{64}$

$F(X=2)=p(0)+p(1)+p(2)=\frac{37}{64}$

$F(X=3)=p(0)+p(1)+p(2)+p(3)=1$

4－2

【解】 $P(\text{壞件})=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=constant$

通式　$P(X)=\binom{4}{X}(\frac{1}{5})^x(\frac{4}{5})^{4-x}$

(a) $P(X=0)=(\frac{4}{5})^4=\frac{256}{625}$

$P(X=1)=\binom{4}{1}\times\frac{1}{5}\times(\frac{4}{5})^3=\frac{256}{625}$

$P(X=2)=\binom{4}{2}(\frac{1}{5})^2\times(\frac{4}{5})^2=\frac{96}{625}$

$P(X=3)=\binom{4}{3}(\frac{1}{5})^3\times\frac{4}{5}=\frac{16}{625}$

$P(X=4)=\binom{4}{4}(\frac{1}{5})^4=\frac{1}{625}$

(b)∵選取後不置回，所以 $P\neq\frac{1}{5}$ 而非一常數樣本空間爲 $25C_4$。

若選出 X 壞件，其法爲 $\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}$

$\therefore P(X)=\frac{\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{25}{4}}$

4－3

【解】 (a)（X is even）

$=P(X=2，4，6，8，\cdots\cdots 2n\cdots\cdots)$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

(b) $P(X\geq 5)=1-p(X<5)$

$=1-p(X=1)-p(X=2)-p(X=3)-p(X=4)$

$$=1-\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}=\frac{1}{36}$$

(c) P（X可被 3 整除）

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{3n}}+\cdots\cdots=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^6}}=\frac{1}{7}$$

4－4

【解】 (a) $P(X=j)=(1-a)a^j\geq 0$，$j=0，1，2，\cdots\cdots$

$\therefore (1-a)\geq 0$，$1\geq a$

a 爲負值無意義，　　$\therefore 1\geq a\geq 0$

(b) $\sum_{j=1}^{a} P(X=j)=(1-a)a^0+(1-a)a'+\cdots\cdots$

$=(1-a)[a^0+a'+\cdots\cdots]$

$$=(1-a)\cdot\frac{a_0}{1-a}=1$$

∴由(a)與(b)知爲一合乎規定之機率分配。

(c) $$P(X>s+t/X>s)=\frac{P[(X>s+t)\cap(X>s)]}{P(X>s)}$$

$$=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{1-[(1-a)a^0+(1-a)a'+\cdots\cdots+(1-a)a^{s+t}]}{1-[(1-a)a^0+(1-a)a'+\cdots\cdots+(1-a)a^s]}$$

$$=\frac{1-[a^0-a'+a'-a^2+a^2\cdots\cdots-a^{s+t+1}]}{1-[a^0-a'+a'-a^2+a^2\cdots\cdots-a^{s+1}]}$$

$$=\frac{a^{s+t+1}}{a^{s+1}}=a^t$$

又 $P(X \geq t) = 1 - P(X < t)$

$= 1 - [(1-a)a^0 + (1-a)a^1 + \cdots\cdots (1-a) a^{t-1}]$

$= a^t$

$\therefore P(X > s+t / X > s) = P(X \geq t)$ 得證

4－5

【解】 事件 A：{機器 1 之產品}　　事件 B：{機器 2 之產品}

事件 D：{物品壞件}

$P(A) = \frac{2}{3}$ ，　$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(D \mid A) = 0.04$ ，　$P(D \mid B) = 0.02$

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$

$= P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B)$

$= 0.04 \times \frac{2}{3} + 0.02 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$

$\therefore P(D = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{1}{30})^2 \cdot (\frac{29}{30})^8$

4－6

【解】 令 T_x 代表第 x 次成功的總值。

則 $T_x = \frac{K}{3}(x-1) + K - C$

$P(T_x) = (0.2)^{x-1} \times 0.8$

$\therefore T_1 = K - C$　　$P(T_1) = 0.8$

$T_2 = \frac{4}{3}K - C$　　$P(T_2) = 0.2 \times 0.8$

$T_3 = \frac{5}{3}K - C$　　$P(T_3) = (0.2)^2 \times 0.8$

$T_4 = \frac{6}{3}K - C$　　$P(T_4) = (0.2)^3 \times 0.8$

$T_5 = \frac{7}{3}K - C$　　$P(T_5) = (0.4)^4 \times 0.8$

4－7

【解】 $P(X = k) = \sum_{r=0}^{k} \binom{n_1}{r} p_1^r (1-p_1)^{n_1 - r} \binom{n_2}{k-r} p_2^{k-r} (1-p)^{n_2 - k + r}$

$\therefore P(X = 5) = \sum_{r=0}^{5} \binom{10}{r} (0.3)^r (0.7)^{10-r} \binom{15}{5-r} (0.2)^{5-r} (0.8)^{10+r}$

4－8

【解】 (a) $\dfrac{p_n(k+1)}{p_n(k)}=\dfrac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

$$=\frac{\dfrac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k)!k!}}\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

(b)利用(a)假如 $p_n(k+1)>p_n(k)$

(1)則 $\dfrac{p_n(k+1)}{p_n(k)}>1$

$\therefore\left(\dfrac{n-k}{k+1}\right)\cdot\left(\dfrac{p}{1-p}\right)>1$ $\quad$ ∴得 $np>k+1-p$

即 $k<np-(1-p)$

(2) $\dfrac{p_n(k+1)}{p_n(k)}=1$ $\quad$ ∴解得 $np=k+1-p$

即 $k=np-(1-p)$

(3) $\dfrac{p_n(k+1)}{p_n(k)}<1$ $\quad$ 可解得 $k>np-(1-p)$

(c)由(b)知顯然成立

若 $np-(1-p)=k_o$ $\quad$ 則 $p_n(k_o+1)=p_n(k_o)$

$k_j<k_o$，則 $k_j<np(1-p)$

由(b)(1)知 $p_n(k_j+1)>p_n(k_j)$

$\therefore p_n(k_j)<p_n(k_j+1)<\cdots\cdots\cdots<p_n(k_o)$

同理(b)(2)知 $k_i>k_o=np(1-p)$ 時

則 $p_n(k_i+1)<p_n(k_i)<p_n(k_o+1)=p_n(k_o)$

∴證明 $k_o=np(1-p)$ 與 $k_o'=k_o+1$

$=np-(1-p)+1$ 爲極大値

(d)同(c)理，當 $k_o=np(1-p)$ 非整數時，大於 k_o 的最小整數介於二極大値之間即 k_o 和 k_o+1 之間，而由於本實驗機率分配非連續，所以知此整數值 k 必爲極大値。

(e) $np-(1-p)<0$

$\because k\geq 0$ $\quad$ $\therefore k>np(1-p)$

$p_n(k+1)<p_n(k)$

$\therefore p_n(0) > p_n(1) > \cdots\cdots > p_n(n)$

又 $np-(1-p)=0$ 　　　　$k \geq 0$

$\therefore k = np-(1-p)$ 　　　　$p(0)=p(1)$

或 $k > np-(1-p)$

$\therefore p(0)=p(1)>p(2)>\cdots\cdots\cdots > p_n(n)$

4－9

【解】 $P(X \geq 1) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}$

$\therefore$(1) $P = P(X \geq 1) \cdot P(X \geq 1) = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$

(2) $P = 3 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (1-\frac{3}{4}) = \frac{27}{64}$

4－10

【解】 $p_j = \int_j^{j+1} f(x)\,dx = \int_j^{j+1} be^{-bx}\,dx = -e^{-bx}\Big|_j^{j+1}$

$= (1-e^{-b})e^{-bj}$

令 $e^{-b}=a$ 　　　　則 $p_j = (1-a)a^j$

4－11

【解】 $P(X > b / X < \frac{b}{2}) = \dfrac{P(b < X < \frac{b}{2})}{P(X < \frac{b}{2})} = \dfrac{\int_b^{\frac{b}{2}} 3x^2\,dx}{\int_1^{\frac{b}{2}} 3x^2\,dx}$

$$= \frac{x^3\Big|_b^{\frac{b}{2}}}{x^3\Big|_{-1}^{\frac{b}{2}}} = \frac{-7b^3}{b^3+8}$$

4－12

【解】 (a) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ 　　　　$\int_a^b g(x)\,dx = 1$

$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = 1+1=2$

$\Rightarrow f(x)+g(x)$ 　　*not a pdf in* 　$a \leq x \leq b$

(b) $\int_a^b [\beta f(x)+(1-\beta)g(x)]\,dx$

$= \int_a^b \beta f(x)\,dx + (1-\beta)\int_a^b g(x)\,dx$

$= \beta + (1-\beta) = 1$

$\therefore$ 得證爲 $a \le x \le b$ 間之 pdf

4－13

【解】 (a)面積爲 $\frac{b+a}{2} \times b = 1$ $\quad\therefore b^2 + ab = 2$

$a = \left(\frac{2}{b}\right) - b = \frac{2-b^2}{b}$

(b) $a > 0$，$b > 0$ $\quad\therefore 2 - b^2 > 0$，$0 < b < \sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}$ 爲極大值

4－14

【解】 (a) $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x 20t^3(1-t)\,dt$

$= \int_0^x (20t^3 - 20t^4)\,dt = 5t^4 - 4t^5 \Big|_0^x$

$= 5x^4 - 4x^5 \quad for \quad 0 < x < 1$

(b) $P\left(X \le \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) = 5\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^5$

(c) $when\ P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = H$

$\Rightarrow C_1$ 元／加侖的或然率

$\therefore C_2$ 元／加侖爲 $1-H$

$C_3 = C_1H + (1-H)C_2$ $\quad\leftarrow$ 預期值

4－15

【解】 (a) $\int_0^1 ax\,dx + \int_1^2 a\,dx + \int_2^3 (-ax + 3a)\,dx$

$= \frac{ax^2}{2}\Big|_0^1 + ax\Big|_1^2 + \left(\frac{-ax^2}{2} + 3ax\right)\Big|_2^3$

$= \frac{a}{2} + a + \left(-\frac{9}{2}a + 9a + \frac{4}{2}a - 6a\right) = 2a = 1$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

(b) $F(x) = 0 \qquad x < 0$

$F(x) = \int_0^x ax\,dx = \frac{ax^2}{2} = \frac{x^2}{4} \qquad 0 \le x \le 1$

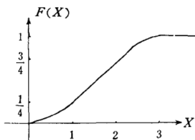
$F(x) = \frac{a}{2} + \int_1^x a\,dx = ax - \frac{a}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \qquad 1 \le x \le 2$

$$F(x)=\frac{3a}{2}+\int_2^x(-ax+3a)\,dx$$

$$=\frac{3a}{2}+\left(-\frac{ax^2}{2}+3ax-4a\right)=\frac{-ax^2}{2}+3ax-\frac{5}{2}a$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{5}{4} \qquad 2\le x\le 3$$

$F(x)=1 \qquad x\ge 3$



(c) $F(x\geq 1.5)=1-F(1.5)$

$$=1-\left(\frac{1.5}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

4－16

【解】 (a) $\int_0^1 6x(1-x)\,dx=(3x^2-2x^3)\Big|_0^1=1$

(b) $F(x)=P(X\leq x)$

$$=\int_0^x 6t(1-t)\,dt$$

$$=3t^2-2t^3\Big|_0^x=3x^2-2x^3$$

(c) ∵爲連續隨機函數，　　∴ $P(X<b)=P(X\leq b)$

$P(X<b)=F(b)=3b^2-2b^3$

$2P(X>b)=2[1-P(X\leq b)]$

$=2[1-F(b)]$

$=2[1-3b^2-2b^3)]$

若 $P(X<b)=2P(X>b)$

$\Rightarrow 3b^2-2b^3=2[1-(3b^2-2b^3)]$

$\therefore 3b^2-2b^3=\frac{2}{3}$

(d) $$P\left(x\leq\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\right)=\frac{P\left(\frac{1}{3}<x\leq\frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\right)}=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)}{F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]-\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]}{\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]-\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]}$$

4－17

【解】 (a) $\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{5}=f(x)$ ， $0<x<5$

(b) $\frac{dF(x)}{dx}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\circ\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x-x^{2}}}$ $0<x<1$

(c) $\frac{dF(x)}{dx}=3e^{3x}$ $x<0$

(d) $\frac{dF(x)}{dx}=\frac{3x^{2}}{2}$ $-1<x<1$

又對各 $f(x)$ 則 $\int_{c}^{d}f(x)\,dx=F(x)\Big|_{c}^{d}=1$ 顯然成立，故 $f(x)$ 爲 pdf 。

4－18

【解】 (a) $\int_{2000}^{10000}\frac{k}{x^{2}}\,dx=\frac{-k}{x}\Big|_{2000}^{10000}=\frac{k}{2500}=1$

$\therefore k=2500$

(b) $\int_{2000}^{10000}\frac{k}{x^{3}}dx=\frac{-k}{x^{2}}\Big|_{2000}^{10000}=\frac{k}{2}\left[\left(\frac{1}{2000}\right)^{2}-\left(\frac{1}{10000}\right)^{2}\right]$

$=1$ ，可解得 k 值。

(c) $\int_{2000}^{10000}\frac{k}{x^{n}}dx=\frac{k}{(-n+1)x^{n-1}}\Big|_{2000}^{10000}=1$

$=k\left[\frac{1}{(-n+1)(10000)^{n-1}}-\frac{k}{(-n+1)(2000)^{n-1}}\right]$

$=1$

可由此解得 *general* k 值。

(d) $P(X\leq 5000)=\int_{2000}^{5000}\frac{k}{x^{n}}dx=\frac{k}{(-n+1)x^{n-1}}\Big|_{2000}^{5000}$

以(c)中之 k 代入，則可解(d)

(e) $F(x)=\int_{2000}^{x}\frac{k}{x^{n}}\,dx=P(X\leq x)$

$=\frac{k}{(-n+1)x^{n-1}}\Big|_{2000}^{x}$

$=k\left[\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}-\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}\right]$

4－19

【解】 (a) $P(X\leq 8)=1-P(X\geq 9)=1-0.0001437$

(b) $P(X=7)=0.0105921-0.0015904$

4－24

【解】　$P=0.05$

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=(0.95)^{10}+\binom{10}{1}(0.05)^{1}(0.95)^{9}$$

$$+\binom{10}{2}(0.05)^{2}(0.95)^{8}$$

4－25

【解】　(a) $P(x<200 \mid x>150)=\dfrac{p(150<x<200)}{1-p(x<150)}$

$$=\frac{\int_{150}^{200}\frac{100}{x^{3}}dx}{\int_{100}^{150}\frac{100}{x^{2}}dx}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$$

(b) $P(X>150)=\dfrac{2}{3}$　，　$P(X<150)=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore 3C_{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{9}$$

(c) $[P(X>150)]=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow n=1$ 為最大管數目

4－26

【解】　(a) PⅡ為8次 *trials* 中有二次成功的或然率。

PⅡ $=p_{1}\times p_{2}\times(1-p_{3})\times(1-p_{4})\times\cdots\cdots\times(1-p_{8})$

$+p_{1}\times p_{3}\times(1-p_{2})\times(1-p_{4})\times\cdots\cdots\times(1-p_{8})$

$+\cdots\cdots$等 ${}_{8}C_{2}=28$ 個或然率之和。

PⅠ為8次 *trials* 中有一次成功的或然率。

PⅠ $=p_{1}\times(1-p_{2})\times(1-p_{3})\times\cdots\cdots\times(1-p_{8})$

$+p_{2}\times(1-p_{1})\times(1-p_{3})\times\cdots\cdots\times(1-p_{8})$

$+\cdots\cdots\cdots$等 ${}_{8}C_{1}$ 個或然率之和。

$P_{0}=(1-p_{1})\times(1-p_{2})\times\cdots\cdots\times(1-p_{8})$

$\therefore\Rightarrow P$（至少三次成功）$=1-P_{0}-P$Ⅰ$-P$Ⅱ

又　$P_{1}=\dfrac{1+1}{2+1}=\dfrac{2}{3}$　　　　$P_{2}=\dfrac{3}{4}$

$P_{3}=\dfrac{4}{5}$　　　　$P_{4}=\dfrac{6}{5}$

(c) $P(X<\frac{1}{2})=\frac{7}{10} \Rightarrow \alpha=\frac{5}{7}$

(d) $P(X<\frac{1}{2})=\frac{3}{10} \Rightarrow \alpha=\frac{5}{3}$

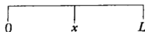
(e) $P[\,|X|<1\,]=\frac{1}{\alpha}$

$P[\,|X|>1\,]=1-\frac{1}{\alpha}$ ∴得 $\alpha=2$

4－22

【解】 視 X 爲連續隨機變數

$f(x)=\frac{1}{L}\ (0<x<L)$



（∵線 L 可視爲無窮點之集合）

依題意：$\frac{x}{L-x}<\frac{1}{4}$ 或 $\frac{L-x}{x}<\frac{1}{4}$

即 $4x<L-x$ 或 $4L-4x<x$

$\therefore x<\frac{L}{5}$ $\therefore x>\frac{4}{5}L$

$P(x\leq\frac{L}{5})=\int_{0}^{\frac{L}{5}}\frac{1}{L}dx=\frac{1}{L}\times\frac{L}{5}=\frac{1}{5}$

$P(x>\frac{4}{5}L)=\int_{\frac{4}{5}L}^{L}\frac{1}{L}dx=\frac{1}{5}$

$\therefore P=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

4－23

【解】 (a) $P(X=3)=\binom{10}{3}(0.1\times0.9)^{3}(1-0.1\times0.9)^{7}$

$P(X>3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$
$-P(X=3)$

$=1-\binom{10}{0}(0.1\times0.9)^{0}(0.91)^{10}$

$-\binom{10}{1}(0.1\times0.9)^{1}(0.91)^{9}$

$-\binom{10}{2}(0.09)^{2}(0.91)^{8}-\binom{10}{3}(0.09)^{3}(0.91)^{7}$

(b) $P(X=k)=\binom{10}{k}(0.09)^{k}(0.91)^{10-k}$

(c) $P(X>6)=P(X\geq 7)=0.0105921$

4－20

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{2\alpha}$ ， $-\alpha<x<\alpha$

(a) $P(X>1)=\int_{1}^{\alpha}\dfrac{1}{2\alpha}dx=\dfrac{\alpha-1}{2\alpha}=\dfrac{1}{3}$

解得　$\alpha=3$

(b) $P(X>1)=\dfrac{1}{2}=\int_{1}^{\alpha}\dfrac{1}{2\alpha}dx=\dfrac{\alpha-1}{2\alpha}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2\alpha-2=2\alpha$

但不成立，所以不能解出 α 值

(c) $P(x<\dfrac{1}{2})=\int_{-\alpha}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2\alpha}dx=\dfrac{\frac{1}{2}+\alpha}{2\alpha}=0.7$

$\therefore 14\alpha=5+10\alpha$ ， $\therefore \alpha=\dfrac{4}{5}$

(d) $P(X<\dfrac{1}{2})=0.3$ ， $\therefore \dfrac{3}{10}=\dfrac{\frac{1}{2}+\alpha}{2\alpha}$

$\therefore 5+10\alpha=6\alpha$ ， $\alpha=-\dfrac{5}{4}$

(e) $P[(|X|<1)]=P(-1<X<1)=\dfrac{2}{2\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

$P[|X|>1]=P(X<-1,X>1)$

$=1-\dfrac{1}{\alpha}$

由條件知 $1-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ ， $\alpha=2$

4－21

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{\alpha}$

(a) $P(X>1)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{\alpha-1}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$ ， $3\alpha-3=\alpha$ ， $\alpha=\dfrac{3}{2}$

(b) $P(X>1)=\dfrac{1}{2}$ ， $\therefore 2\alpha-2=\alpha$ ， $\alpha=2$

$$P_5 = \frac{6}{7} \qquad P_6 = \frac{7}{8}$$

$$P_7 = \frac{8}{9} \qquad P_8 = \frac{9}{10}$$

⇒代入卽得數値解

(b) $(1-P_1)\times(1-P_2)\times(1-P_3)\times\cdots\cdots\times(1-P_7)\times P_8$

卽爲第一次成功發生在第 8 次實驗的槪率。

4－27

【解】 略

4－28

【解】 由 $B^2-4ac=(4K)^2-4\times4\times(K+2)$

$$=(K-2)(K+1)\geq 0 \leftarrow \text{實根之條件}$$

$$\therefore K\geq 2，K\leq 1$$

$$P(\text{roots are real}) = P(X\geq 2)$$

$$=\frac{1}{5}\times(5-2)=\frac{3}{5}$$

4－29

【解】 $\because 0<\beta<1 \qquad \therefore 0<(1-\beta)<1$

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(X=r) = \sum_{r=1}^{\infty} k(1-\beta)^{r-1}$$

$$=k+k(1-\beta)+k(1-\beta)^2+\cdots\cdots$$

$$=\frac{k}{1-(1-\beta)}=\frac{k}{\beta}=1$$

$\therefore k=\beta$

(b) $P(X=r)=k(1-\beta)^{r-1}=\beta(1-\beta)^{r-1}$

$$\frac{d}{dr}p(X=r)=\beta(r-1)(1-\beta)^{r-2}=0$$

$$as \quad r=1$$

$P(X=r)$ 是最大的

4－30

【解】 $chech\ \frac{1+3x}{4}+\frac{1-x}{4}+\frac{1+2x}{4}+\frac{1-4x}{4}=\frac{4}{4}=1$

由此 x 可爲任意值

又 $1-x\geq 0 \quad x\leq 1$ ， $1-4x\geq 0 \quad x\leq\frac{1}{4}$

$1+3x\geq 0 \quad x\geq-\frac{1}{3}$ ， $1+2x\geq 0 \quad x\geq-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\geq x\geq-\frac{1}{3}$

第五章　隨機變數的函數 (Function of Random Variables)

§5－1　一個例子

假設一個經過精密校正的試管，其開口半徑為X，視為一連續變數，其pdf為f。$A=X^2\times 2$為其開口的剖面積。因X為連續隨機變數，所以A亦為連續隨機變數。設A的pdf為g；因A為X的函數，所以pdf g亦可由pdf f求得。本章我們就是要討論此類問題。在我們熟知某些觀念時，讓我們再次複習上面的觀念。

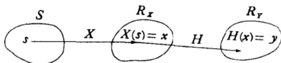


圖5－1

§5－2　對等事件　(Equivalent Events)

令ε是一個實驗，而S是與ε有關的樣本空間。X為定義在S上的隨機變數。假設$y=H(x)$是x的實數函數（real-valued function）。則$Y=H(x)$是個隨機變數，因$\forall s\in S$，有一Y值被確定，$y=H[X(s)]$，如圖5－1所示。和以前一樣，我們稱R_x為X的值域空間，即函數X的所有值所成之集合。同樣定義R_Y為隨機變數Y的值域空間，即函數Y的所有值所成之集合。在4－1式中，我們定義S和R_X內事件的對等觀念。我們現將此觀念加以推廣。

【定義】　讓C是與Y的值空間有關的一個事件（部份集合），令$B\subset R_X$，定義為

$$B=\{x\in R_X\ ;H(x)\in C\} \qquad (5-1)$$

即B是$H(x)\in C$的所有值所成的集合，假如B與C有這種關係的話，我們則謂B和C對等，亦即B和C是對等事件。

【註】　(a)和以前的說明一樣，上面的對等事件非正式的解釋為：如果B與C對等，則B與C一起發生，反之，B和C一起發生，則B和C對等。

(b)假設A是與S有關的一個事件，B是與R_X有關的一個事件，若A和B對等，現若C是與R_X有關的事件且對等於B，則A與C對等。

(c)在不同的樣本空間的事件，對等觀念是很重要的。

【例題5－1】　假設$H(x)=\pi x^2$，則事件$B=\{X>2\}$，$C=\{Y>4\pi\}$

是對等的。因$Y=\pi X^2$，又X不能爲負値，因此$\{X>2\}$若且唯若$\{Y>4\pi\}$（見圖5－2）

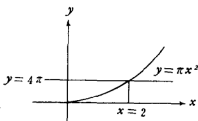


圖5－2

【註】　我們用$\{X>2\}$和$\{Y>4\pi\}$表示時，符號上有缺點。我們應該寫爲X的値和Y的値，亦即$\{s\mid X(s)>2\}$和$\{x\mid Y(x)>4\pi\}$。

如同第四章（4－2式）的做法，再做如下的定義。

【定義】　令X是定義在樣本空間S上的隨機變數，且R_X是X的値域空間。令H是個實數函數，且$Y=H(x)$，其値域空間爲R_Y。對於任意事件$C\subset R_Y$，我們定義$P(c)$爲

$$P(c)=P[\{x\in R_X : H(x)\in C\}] \qquad (5-2)$$

【註】　(a)如果我們能夠知道X的機率分配且決定問題中的對等事件，則上面的定義將使我們能計算與Y有關的事件的機率。

(b)我們以前（4－1式和4－2式）討論過如何將與R_X有關的機率和與S有關的機率聯繫起來，我們可將5－2式寫爲

$$P(c)=P[\{x\in R_X : H(x)\in C\}]$$
$$=P[\{s\in S : H(X(s))\in C\}]$$

【例5－2】　連續隨機變數X的pdf是

$$f(x)=e^{-x}\ ,\ x>0$$

（我們可得$\int_0^\infty e^{-x}dx=1$）

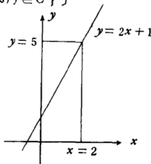


圖5－3

假若$H(x)=2x+1$，因此$R_X=\{x\mid x>0\}$，$R_Y=\{y\mid y>1\}$。假若事件C被定義爲：$C=\{Y\geq 5\}$。現在$y\geq 5$，若且唯若$2x+1\geq 5$，即$x\geq 2$。因此對等$B=\{x\geq 2\}$（見圖5－3）

現$P(x\geq 2)=\int_2^\infty e^{-x}dx=\frac{1}{e^2}$，利用（5－2式），我們可得到

$$P(Y\geq 5)=\frac{1}{e^2}$$

【註】　(a)我們考慮在實驗裡的$x=X(s)$的定數値和$y=H(x)$的定數値；和僅考慮R_Y，Y的値域空間，在實驗裡的樣本空間；是値得的。嚴格的說，我們實驗的樣本空間應該是S，而其結果是s。我們以後的實驗的隨機特性是互不影響，當s獲得後$x=X(s)$和$y=H(x)$的定數値即可決定，在以前我們亦討論過，我們能夠合併這些計算來描述我們的實驗，並且用値域空間R_Y來直接分配。

(b)由於在原來樣本空間 S 的機率分配被決定，所以在 R_X 中的機率分配亦決定。假使 X 的機率分配已知，Y 的機率分配亦可決定。例如，在例 5－2，X 的特殊分配完全決定 $P(Y \geq 5)$ 的值。

(c)考慮隨機變數 X 的函數，$Y=H(x)$，我們必須知道並不是每一個函數 H 都可符合，以後我們必須特別小心，因時常會利用到函數，不可犯以上的錯誤。

§5－3　離散隨機變數

第一種情況：X 是離散隨機變數

如果是離散隨機變數，且 $Y=H(x)$，則 Y 也是離散隨機變數，因假定 X 的值是 x_1，x_2，………，x_n，……則 Y 的值顯然是 $y_1=H(x_1)$，$y_2=H(x_2)$，………（某些 Y 值可能相同，但對於 y 是離散沒有影響）。

【例題5－3】　假若 X 的值是 -1，0，1 的機率分別是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，令 $Y=3x+1$，則 Y 的可能值定 -2，1，4。其機率分別是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$。

這個例子提示了下面的一般做法：如果 x_1 ……，x_n ……是 X 的可能值，$P(x_i)=P(X=x_i)$ 且 H 是個函數，對於每一個值 y，恰有一個值 x 與它對應，則 Y 的機率分配應為

Y 的可能值：　　$y_i=H(x_i)$，　$i=1，2，……，n，……$；

Y 的機率：　　$q(y_i)=P(Y=y_i)=P(x_i)$。

時常函數 H 並沒有上面的特性，且可能對於一個 y 值有好幾個 x 值與它對應。就像下面這例題說明的。

【假題5－4】　我們考慮的 X 和例 5－3 相同，但令 $Y=X^2$，因此 Y 的值可能是 0 或 1，其機率分別為 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$。因 $Y=1$ 若且唯若 $X=-1$ 或 $X=1$，而其機率就是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$。照以前的對等觀念，事件 $B=\{X=\pm 1\}$，和 $C=\{Y=1\}$ 是對等，因此由 5－2 式知道它們有相等的機率。

這個例子提示了一些觀念，令 X_{i1}，X_{i2}，……X_{ik} ……代表 X 的值，且：

$$H(X_{ij})=y_i，\forall_i，則$$

$$q(y_i)=P(Y=y_i)=P(X_{i1})+P(X_{i2})+\cdots\cdots$$

換句話說，事件 $\{Y=y_i\}$ 的機率可以由對等事件 X（其值空間為 R_X）的各項目機率和來決定。（見圖 5－4）

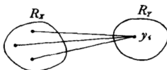


圖5－4

【例題5－5】　令 X 的可能值為 1，

2，n，………並且假定

$P(X=n)=(\frac{1}{2})^n$，令

$Y=1$　　　假使X是偶數，

$=-1$　　　假使X是奇數。

現Y有兩個值-1和$+1$。因$Y=1$若且唯若$X=2$，或$X=4$或$X=6$，或………，應用5－2式可得

$$P(Y=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=-1)=1-P(Y=1)=\frac{2}{3}$$

第二種情況：X是連續隨機變數。

有可能X是連續但Y卻是離散。例如，假定X的值爲所有實數值，而$Y=1$（假使$X\geq 0$），$Y=-1$（假使$X<0$）。爲了要求Y的機率分配，我們只決定對應於不同的Y值的對等事件（在R_X內）。上面的情況：$P(Y=1)=P(X\geq 0)$，$P(Y=-1)=P(X<0)$。假如X的pdf已知，這些機率即可求出。通常情況，如果$\{Y=y\}$對等事件A（在R_X內），

則　　　$q(y_i)=P(Y=y_i)=\int_A f(x)\,dx$

§5－4　連續隨機變數

最重要且最時常遇到的情形是X是連續隨機變數且有pdf f。若H是連續函數，則$Y=H(x)$是連續隨機變數。我們現就是要求出pdf g。

通常是如此做的：

(a)獲得Y的cdf G，這兒$G(y)=P(Y\leq y)$。但如此獲得G呢？我們可以找對等於事件$\{Y\leq y\}$的事件A（在R_X內）。

(b)$G(y)$對y微分，以獲得$g(y)$。

(c)決定那些使$g(y)>0$的y值。

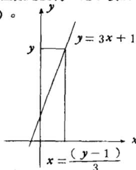


圖5－5

【例題5－6】　假設X有pdf

$f(x)=2x$，　　$0<x<1$，

$=0$，　　其他值

令$H(x)=3x+1$，因此要我$Y=H(x)$的pdf，我們有（見圖5－5）。

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(3X+1\leq y)$$

$$=P\left(X\leq\frac{(y-1)}{3}\right)$$

$$=\int_0^{(y-1)/3} 2x\,dx=\left[\frac{(y-1)}{3}\right]^2$$

於是 $g(y)=G'(y)=\frac{2}{9}(y-1)$。

因爲 $f(x)>0$，對 $0<x<1$，我們可知 $g(y)>0$，對 $1<y<4$。

【註】 上面提到的事件 A，其對等事件 $\{Y\leq y\}$ 就是 $\{X\leq\frac{(y-1)}{3}\}$

也有其他稍微不同的方法可以求得相同的結果，這對於以後相當的有用。我們再考慮

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(X\leq\frac{y-1}{3})=F(\frac{y-1}{3})$$

這裡 F 是 X 的 cdf；亦即

$$F(x)=P(X\leq x)$$

爲了計算 G 的導函數，$G'(y)$，我們用鏈微法則（Chain rule）

$$\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dG(y)}{du}\ \frac{du}{dy}$$，這兒 $u=\frac{y-1}{3}$

因此

$$G'(y)=F'(u)\cdot\frac{1}{3}=f(u)\frac{1}{3}=2\left(\frac{y-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$$

跟前面所得結果相同，Y 的 pdf 如圖5－6所示（驗證 $\int_1^4 g(y)\,dy=1$ 的結果）。

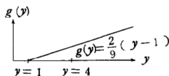


圖5－6

【例題5－7】 假定有一個連續隨機變數；其 pdf 如例5－6，令 $H(x)=e^{-x}$，求 $Y=H(x)$ 的 pdf（見圖5－7）。

$$C(y)=P(Y\leq y)=P(e^{-x}\leq y)$$

$$=P(X\geq -ln\ y)=\int_{-ln\ y}^{1}2x\,dx$$

$$=1-(-ln\ y)^2$$

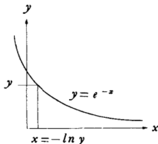


圖5－7

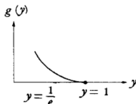


圖5－8

因此 $g(y)=G'(y)=\dfrac{-2\,ln\,y}{y}$。因 $f(x)>0$，對 $0<x<1$，我們發現 $g(y)>0$，對 $\dfrac{1}{e}<y<1$。（注意 $g(y)$ 的代數符號是正確的，因 $\dfrac{1}{e}<y<1$，所以 $ln\,y<0$）$g(y)$ 的圖形如（圖 5－8）所示。

我們仍然利用不同的方法求得上面的結果。如以前的，

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(X\geq -ln\,y)$$
$$=1-P(X\leq -ln\,y)=1-F(-ln\,y),$$

這裡 F 是 X 的 cdf。爲了獲得 G 的微分，我們再使用鏈微法則：

$$\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dG}{du}\ \frac{du}{dy}\quad,\ u=-ln\,y$$

因此，

$$G'(y)=-F'(u)\left(-\frac{1}{y}\right)=2\,ln\,y\cdot\left(-\frac{1}{y}\right),$$

和前面所得相同。

讓我們再將上面兩個例子所提示的方法加以推廣。最重要的以 $\{Y\leq y\}$ 的對等事件代換。上面的例子此項工作是相當容易，因所給的函數不是嚴格遞增就是嚴格遞減。

在圖 5－9 中，y 是 x 的嚴格遞增函數，因此我們可以解 $y=H(x)$ 爲 $x=H^{-1}(y)$，H^{-1} 稱爲 H 的反函數（inverse function），因此如果 X 是嚴格遞減，則 $\{H(x)\leq y\}$ 對等於 $\{X\geq H^{-1}(y)\}$。

我們將上面例題所講到的方法總結在下個定理。

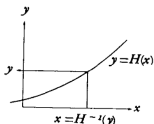


圖 5－9

【定理 **5－1**】 令 X 是連續隨機變數，有 pdf f。$f(x)>0$，$\forall\, a<x<b$，假若 $y=H(x)$ 是嚴格單調（strictly monotone）（即嚴格遞增或嚴格遞減）函數。假定對所有的 x 而言，此函數是可微分的（因此是連續的），則隨機變數 $Y=H(x)$ 有 pdf g。

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \tag{5-3}$$

這裡 x 表爲 y 的項目，如果 x 是遞增，則對於滿足 $H(b)<y<H(a)$ 的 y 所有值而言，g 不等於 0。

【證明】 (a)假定 H 是嚴格遞增函數，則

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(H(x)\leq y)$$
$$=P(x\leq H^{-1}(y))=F(H^{-1}(y))$$

對於y的$G(y)$微分，我們使用鏈微法則，

$$\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dG(y)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}\quad, x=H^{-1}(y)$$

因此，

$$G'(y)=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=f(x)\frac{dx}{dy}$$

(b)假定H是嚴格遞減函數，

則　$G(y)=P(Y\leq y)=P(H(x)\leq y)=P(X\geq H^{-1}(y))$

$=1-P(X\leq H^{-1}(y))=1-F(H^{-1}(y))$

照以前的方法進行，可得

$$\frac{dG(y)}{dy}=\frac{dG(y)}{dx}\ \frac{dx}{dy}=\frac{d}{dx}[1-F(x)]\frac{dy}{dy}=-f(x)\frac{dx}{dy}$$

【註】(b)的代數符號是正確的，因y若對x是遞減函數，x亦為y的遞減函數，因此$\frac{dx}{dy}<0$。因此，使用絕對值來包括$\frac{dx}{dy}$。我們綜合(a)與(b)可得定理的證明。

【例題5－8】　我們利用定理5－1，重新考慮例5－6和例5－7。

(a)對於例5－6，我們有$f(x)=2x$，$0<x<1$，且$y=3x+1$，因此$x=\frac{(y-1)}{3}$，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}$，故$g(y)=2[\frac{(y-1)}{3}]\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}(y-1)$，$1<y<4$。

(b)對於例5－7，我們有$f(x)=2x$，$0<x<1$，且$y=e^{-x}$，因此$x=-\ln y$，且$\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{y}$。因此$g(y)=\frac{-2(\ln y)}{y}$，$\frac{1}{e}<y<1$。以上的結果再次被驗證。

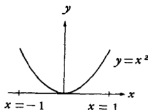


圖5－10

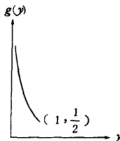


圖5－11

如果$y=H(x)$不是x的單調函數，我們就不能直接用上面的方法，必須利用上面的一般方法。現下面例子說明這種方法。

【例題5－9】 假設

$$f(x)=\frac{1}{2} \qquad -1<x<1$$
$$=0 \qquad 其它值$$

令$H(x)=x^2$，這對〔－1，1〕顯然不是單調函數（見圖5－10）因此用下面方法求$Y=x^2$的pdf

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)$$
$$=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})$$
$$=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}),$$

這裡F是隨機變數X的cdf，因此

$$g(y)=G'(y)=\frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}-\frac{f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f\sqrt{y}+f(-\sqrt{y})]$$

因此

$$g(y)=\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0<y<1$$

（見圖5－11）。

【定理5－2】 令X是連續隨機變數有pdf f，且$Y=X^2$，則Y的pdf是

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})]$$

【證明】 見例5－9。



5－1 假若X均勻分佈在（－1，1）上，求$Y=4-X^2$，求Y的pdf，$g(y)$，且繪其圖，並證明$g(y)$也是個pdf。

5－2 假若X均勻分佈在（1，3）上，試求下列隨機變數的pdf。

(a) $Y=3X+4$。 (b) $Z=e^x$

並證明所求得的函數亦是個pdf，且繪其圖。

5－3 假定連續隨機變數X有pdf $f(x)=e^{-x}$，$x>0$，試求下列隨機變數的pdf。

(a) $Y=X^3$。 (b) $Z=\dfrac{3}{(X+1)^2}$

5－4 假定離散隨機變數X之值是1，2，3的機率均為$\frac{1}{3}$，試求$Y=2X+3$的機率分配。

5－5 假若X均勻分佈在（0，1）上，試求下列隨機變數的pdf。

(a) $Y = X^2 + 1$　　　(b) $Z = \dfrac{1}{(X+1)}$

5－6　假若 X 均勻分佈（-1，1）上，試求下列隨機變數的 pdf。

(a) $Y = sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)X$　　(b) $Z = cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)X$　　(c) $W = |X|$

5－7　假若球的半徑是連續隨機變數（由於製造程序不精確，不同的球的半徑可能不同）。又設半徑 R 的 pdf 是 $f(r) = 6r(1-r)$，$0 < r < 1$，試求體積 V 及球面積 S 之 pdf。

5－8　一隨時在變動的電流 I 可視為均勻分佈在（9，11）上的隨機變數，如果此電流流過 2 歐姆的電阻器，試求功率 $P = 2I^2$ 的 pdf。

5－9　在均衡狀態的均勻氣體的分子速率是個隨機變數 V，其 pdf 是

$$f(v) = av^2e^{-bv^2}, \quad v > 0$$

這裡 $b = \dfrac{m}{2KT}$ 而 K，T，m 分別為 Boetzmen's 常數，絕對溫度，分子質量。

(a)計算常數 a（表為 b 的式子）。

（提示：利用 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 和部份積分法）

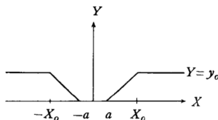
(b)導出隨機變數 $W = \dfrac{mV^2}{2}$ 的分配，W 代表分子的動能。

5－10　電壓 X 是均勻分佈在（$-k$，k）上的隨機變數，如果 Y 是一個非線性設計的輸入，其特性如圖 5－12 所示，試求下列三種情形 Y 的機率分配。

(a) $k < a$

(b) $a < k < x$

(c) $k > x$



【註】：這裡 Y 的機率分配就是混合分配（Mixed distribution）的一個例子。Y 值是 0 的機率是正值且介於某一區間內的所有值。

5－11　輻射能（單位是 $BTU/hr/ft^2$）是溫度 T（華氏）的函數：$E = 0.173\left(\dfrac{T}{100}\right)^4$，假設 T 是連續隨機變數，其 pdf 是

$$f(t) = 200t^{-2} \qquad 40 \le t \le 50$$
$$= 0 \qquad 其他值$$

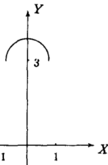
試求E的pdf。

5－12 要測量空氣速度時，我們利用（ Pitot 靜力管）以測量差動氣壓，此差動氣壓滿足$P=\frac{1}{2}dV^2$，這裡d是空氣密度，V是風速（$m$ph），如果V是均勻分佈在（10，20）上的隨機變數，求P的pdf。

5－13 假設$P(X\leq 0.29)=0.75$，這兒X是連續隨機變數，且有某種定義在（0，1）上之分配，如果$Y=1-X$，試決定k之值使$P(Y\leq k)=0.25$。



5－1



【解】 在－1與1間非嚴格單調函數　　$Y=4-X^2$

$f(x)=\frac{1}{2}$，$-1<x<1$

$$
\begin{aligned}
G(y)&=P(Y\leq y)\\
&=P(4-X^2\leq y)\\
&=P(X^2\geq 4-y)\\
&=P(X\geq\sqrt{4-y}\text{ 或 }X\leq-\sqrt{4-y})\\
&=1-[F(\sqrt{4-y})-F(-4\sqrt{4-y})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x)=G'(y)&=-[F'(\sqrt{4-y})(d/dy)(\sqrt{4-y})\\
&\quad-F'(-\sqrt{4-y})(d/dy)(-\sqrt{4-y})]\\
&=-\left[\frac{-f(\sqrt{4-y})}{2\sqrt{4-y}}-\frac{f(-\sqrt{4-y})}{2\sqrt{4-y}}\right]\\
&=\frac{1}{2\sqrt{4-y}}
\end{aligned}
$$

$Y=4-x^2$　　　　$x^2=4-Y$

since　　$-1<x<1$　　則$3<Y<4$

$$\int_3^4\frac{1}{2\sqrt{4-y}}dy=-\frac{1}{2}\int_1^0 u^{-\frac{1}{2}}du=(-1)\cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^0=1$$

∴得證$\frac{1}{2\sqrt{4-y}}$　$3<y<4$內為一pdf

5－2

【解】 $f(x)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$　，　$1<x<3$

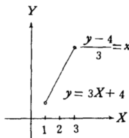
(a)$Y=3X+4$　，在$1<x<3$內為嚴格漸升函數

$\therefore g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dY}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y-4}{3}\right)\right|=\frac{1}{6}$

又 $x=\frac{Y-4}{3}$

$1<x<3 \Rightarrow 7<y<13$



(b) $Z=e^{x}$ 在 $1<x<3$ 間亦嚴格漸升函數

$\therefore g(Z)=f(x)\left|\frac{dx}{dZ}\right|$

$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{d}{dZ}(\ln Z)\right|=\frac{1}{2Z}$

$\therefore e^{x}=Z$ ， $x=\ln Z$ ， 又 $1<x<3$

$\therefore e<Z<e^{3}$

5－3

【解】 (a) $when\ X>0$，$Y=X^{3}$ 是嚴格漸升函數

$\therefore g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=e^{-x}\cdot\left|\frac{d}{dy}(\sqrt[3]{y})\right|$

$=e^{-y^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\ for\quad y>0$

(b)同理 $when\quad x>0$，$Z=\frac{3}{(x+1)^{2}}$ 亦是嚴格漸減函數

$g(Z)=f(x)\left|\frac{dx}{dZ}\right|=e^{-x}\left|\frac{-3}{3Z\sqrt{3Z}}\right|$

$=e^{-(\frac{3}{2}-1)}\circ\frac{\sqrt{3}}{2}Z^{-\frac{3}{2}}\ for\quad Z>0$

$\because Z=\frac{3}{(X+1)^{2}}$ ， $\therefore (X+1)^{2}=\frac{3}{Z}$

$\therefore X=\sqrt{\frac{3}{Z}}-1$

$\left|\frac{dX}{dZ}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{Z}}}\cdot\left(\frac{-3}{Z^{2}}\right)\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}Z^{-\frac{3}{2}}\right|$

5－4

【解】 $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{3}$

其他 X 值之 P 皆爲0

$$P(Y=5)=P(X=1)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=7)=P(X=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=9)=P(X=3)=\frac{1}{3}$$ ，其他值之P皆爲0。

5－5

【解】 (a) $f(x)=1 \qquad 0<X<1$

$Y=X^2+1$， 則$X=\sqrt{Y-1} \quad 0<X<1 \qquad 2>Y>1$

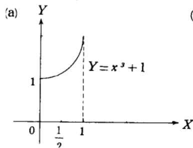
$$\left|\frac{dX}{dY}\right|=\frac{1}{2}(Y-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$\because Y=X^2+1$ 在$(0,1)$間爲嚴格漸升函數，(a)圖

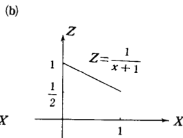
$$\therefore g(y)=f(x)\left|\frac{dX}{dY}\right|=1\cdot\frac{1}{2}(Y-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{Y-1}} \qquad 2>Y>1$$

(a)



(b)



(b)如圖(b) $Z=\frac{1}{X+1}$ 在$0<X<1$間爲嚴格漸減函數。

$$g(Z)=f(X)\left|\frac{dX}{dZ}\right|=1\cdot(X+1)^2=(X+1)^2=\frac{1}{Z^2}$$

$\because Z=\frac{1}{X+1} \qquad \therefore dZ=-(X+1)^{-2}dX$

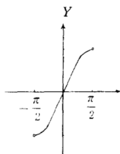
$\therefore\frac{dX}{dZ}=-\left(\frac{1}{X+1}\right)^{-2}$ ，又$0<X<1 \qquad \therefore 1>Z>\frac{1}{2}$

5－6

【解】 (a)在$-1<X<1$時

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad \therefore Y=sin[(\frac{\pi}{2})X]$

is strictly monotone



$\left|\frac{dX}{dY}\right| = \left|\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}\right|$

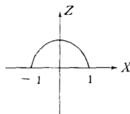
$(\because X = \frac{2}{\pi}\ sin^{-1} Y)$

（由微分公式 $\frac{d}{dX}\ sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dX}$

$-1 < X < 1$　，　$\therefore -1 < Y < 1$

$\therefore g(y) = f(x) \left|\frac{dX}{dY}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}$

$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}$



(b)在 $-1 < X < 1$ 時　，$Z = cos\ [(\frac{\pi}{2})X]$

is not strictly monotone

$G(Z) = P(Z \leq z) = P(cos\ \frac{\pi}{2} X \leq y)$

$= P(\{-\frac{\pi}{2} \leq z \leq cos\ \frac{\pi}{2} X\} \cup \{cos\ \frac{\pi}{2} X \leq z \leq \frac{\pi}{2}\})$

$= 2P(\frac{-\pi}{2} \leq z \leq cos\ \frac{\pi}{2} X) = 2F(-\frac{2}{\pi}\ cos^{-1} z)$

$\therefore g(Z) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{-2}{\pi})(\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$0 < Z < 1$

另解：(1) $0 < x \leq 1$，$Z = cos\ (\frac{\pi}{2} x)$

$dZ = -sin\ (\frac{\pi}{2} x) \cdot \frac{\pi}{2} dx$

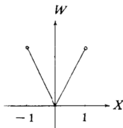
$J_1 = \left|\frac{dx}{dZ}\right| = \frac{2}{\pi} \left|\frac{1}{sin\ (\frac{x}{2} x)}\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}$

(2) $-1 < x < 0$，同上法得 $J_2 = \left|\frac{dx}{dZ}\right| = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$\therefore g(Z) = f(x)(J_1 + J_2) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$0 < z < 1$

(c) $G(w) = P(W \le w) = P(|X| \le w)$
$= 2P(0 \le X \le w) = 2[F(x) - F(0)]$



$G'(w) = g(w) = 2F'(x)\dfrac{dx}{dw}$
$= 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 \quad , \quad 0 < w < 1$

另法：$w = |X|$　(1) $0 < x < 1, \dfrac{dx}{dw} = 1$

(2) $-1 < x < 0, \dfrac{dx}{dw} = -1$

$G(w) = P(|X| \le w) = P(-w \le x \le w) = F(w) - F(-w)$

$g(w) = f(w)\dfrac{dx}{dw} - f(-w)\dfrac{dx}{dw} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

$0 < w < 1$

5−7

【解】 (a) $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ *as* $a < r < 1$ *is strictly increasing*

$\therefore g(v) = f(r)\left|\dfrac{dr}{dv}\right| = 6r(1-r) \cdot \dfrac{1}{4\pi r^2} = \dfrac{3(1-r)}{2\pi r}$

$\because v = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad \therefore r = 3\sqrt{\dfrac{3v}{4}} \qquad 0 < r < 1$

$\therefore dv = 4\pi r^2\, dr \qquad \therefore 0 < v < \dfrac{4}{3}\pi$

$\dfrac{dr}{dv} = \dfrac{1}{4\pi r^2}$

以 $r = 3\sqrt{\dfrac{3v}{4\pi}}$ 代入得 $g(v) = \dfrac{3}{2\pi}\left[\left(\dfrac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right]$

(b) $S = 4\pi R^2$ *as* $0 < r < 1$ *is strictly increasing* $s = 4\pi r^2$

$\therefore ds = 8\pi r\, dr \qquad \therefore \dfrac{dr}{ds} = \dfrac{1}{8\pi r}$

$\because 0 < r < 1 \qquad \therefore 0 < s < 4\pi$

又 $\dfrac{\sqrt{s}}{4\pi} = r$

$g(s) = f(r)\left|\dfrac{dr}{ds}\right| = 6r(1-r) \cdot \dfrac{1}{8\pi r}$

$= \dfrac{3(1-r)}{4\pi} = \dfrac{3}{4\pi}\left[1 - \left(\dfrac{s}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \quad 0 < s < 4\pi$

5－8

【解】 *Random variable I* 在（9，11）間作 *continuous uniformly distribution*

$\therefore f(i)=\frac{1}{11-9}=\frac{1}{2} \qquad 9<i<11$

同時 $P=2I^2$ 在 $P<i<11$ 間爲嚴格漸升函數

$P=2i^2 \qquad \therefore dp=4i\,di \qquad 9<i<11$

$\therefore \frac{di}{dp}=\frac{1}{4i} \qquad 162<P<242$

$$g(p)=f(i)\left|\frac{di}{dp}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4i}=\frac{1}{8i}=\frac{1}{8\sqrt{\frac{p}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{2p}}\ ,\ 162<p<242$$

5－9

【解】 (a)由 $\int_0^\infty av^2e^{-bv^2}dv=1$

可解出 a，b，然後利用 b 表示 a。

（積分時利用 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）

(b)$W=\frac{m}{2}V^2$ 在 $U\in$（9，11）爲1－1

$\frac{dv}{dw}=\frac{1}{mv}$

$$g(w)=f(v)\left|\frac{dv}{dw}\right|=av^2e^{-bv^2}\frac{1}{mv}=\frac{a}{m}ve^{-bv^2}$$

$$=\frac{a}{m}\sqrt{\frac{2w}{m}}e^{-\frac{mw}{KT}}$$

5－10

【解】 (a)$f(x)=\frac{1}{2k}$ ，$-k<x<k$

since $k<a \quad y=0$ *for all* $-a<x<a$

$\therefore g(y)=1$ *at* $y=0 \qquad P(x<k)=1$

$g(y)=0 \qquad y$ *at elsewhere*

(b) $a<k<x_0 \qquad y=0$ *for all* $-a<x<a$

$$P(|x|<a)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2k}dx=\frac{2a}{2k}=\frac{a}{k}$$

$$\therefore g(y=0)=\frac{a}{k}$$

$$0<y<y_o \qquad for \quad \frac{a<x<x_o}{-x_o<x<-a}$$

$$y=\left(\frac{y_o}{x_o-a}\right)(x-a) \quad , \frac{dx}{dy}=\frac{x_o-a}{y_o}$$

$$g(y)=2f(x)\frac{dx}{dy}=2\left(\frac{1}{2k}\right)\cdot\frac{x_o-a}{y_o}=\frac{x_o-a}{y_o k}$$

$$for \quad 0<y<y_o$$

(c) $k>x_o$

$for \quad y=0 \qquad g(0)=\frac{2a}{2k}=\frac{a}{k}$

$0<y<y_o \qquad g(y)=\frac{x_o-a}{ky_o}$

$y=y_o \qquad g(y_o)=\frac{2(k-x_o)}{2k}=1-\frac{x_o}{k}$

5－11

【解】 在 $40\leq t\leq 50$ 間 $E=0.173\left(\frac{T}{100}\right)^4$ 爲嚴格漸升函數 $e=0.173\left(\frac{t}{100}\right)^4$

$$\therefore de=4\times 0.173\times\frac{1}{100}\times\left(\frac{t}{100}\right)^3\cdot dt$$

$$\therefore\frac{dt}{de}=\frac{25}{0.173\times\left(\frac{t}{100}\right)^3} \text{ 又 } \sqrt[4]{\frac{e}{0.173}}\times 100=t$$

$$\therefore g(e)=f(e)\cdot\left|\frac{dt}{de}\right|=200\,t^{-2}\cdot\left[\frac{25}{0.173\times\left(\frac{t}{100}\right)^3}\right]$$

$$=\frac{200}{(100)^2}\cdot\left(\frac{e}{0.173}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{25}{0.173\times\left(\frac{e}{0.173}\right)^{\frac{3}{4}}}\right]$$

$$0.173\left(\frac{40}{100}\right)^4<e<0.173\left(\frac{50}{100}\right)^4$$

5－12

【解】 $P=\frac{1}{2}dV^2 \qquad f(V)=\frac{1}{10} \quad , V\in(10, 20)$

$dP=dV(dv)$

$$\frac{dv}{dp}=\frac{1}{dv} \quad , \quad g(p)=f(v)\left|\frac{dv}{dp}\right|=\frac{1}{10dv}=\frac{1}{10\sqrt{2pd}}$$

5－13

【解】 $P(Y<k)=P(1-X<k)=P(X>1-k)=0.25$

又 $1-P(X\leq 0.29)=0.25$

$\therefore P(X>0.29)=P(X>1-k)$

$\therefore -k+1=0.29$

$\therefore k=0.71$

第六章　二維及高維隨機變數

§6－1　二維隨機變數 (Two-Dimensional Random Variables)

到目前爲止，我們只討論一維的情形。亦卽其結果均可以單一數目 x 表之。但很多情況下，如討論鋼件的硬度 H (hardness)，抗拉強度 T (tensile strength)…便要同時涉及到好幾種的變數，此例可以 (h，t) 表之。又若表示某人的身高 H 和體重 W，可以 (h，w) 表之。在某一地區一定時間內的所有下雨量 R 和平均溫度 T，可以 (r，t) 表之。

【定義】 有一隨機試驗，其樣本空間爲 S，對於 S 之每一元素 S 而言，存在而且只有一個實數與之對應，其函數爲 $X=X(s)$，$Y=Y(s)$，$s\in S$，我們稱 (X，Y) 爲二維隨機變數 (Two-dimensional random variable)，有時稱 n 維隨機向量 (n-dimensional random vector) 若存在 n 箇函數，每箇函數僅有一實數與之對應

$X_1=X_1(s)$，$X_2=X_2(s)$，………
$X_n=X_n(s)$，$s\in S$，我們稱 (X_1，X_2，……X_n) 爲 n 維隨機變數 (n-dimensional random variable) 或 n 維隨機向量 (n-dimensional random vector)

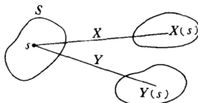


圖 6－1

【附註】 和一維時的情形一樣，我們所關心的不是 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 的函數性質，而是 X 和 Y 設定的值。我們將再提到 (X，Y) 的值域空間 $R_{X\times Y}$，爲 (X，Y) 所有值的集合。例如在二維情況 (X，Y) 的值域空間爲歐幾里得平面 (Euclidean plane) 的部分集合，每個結果 $X(s)$，$Y(s)$ 可代表平面上的一點 (x，y)。又我們將以 $P[X\leq a, Y\leq b]$ 代替 $P[X(s)\leq a, Y(s)\leq b]$

如同一維情況，我們將區別離散和連續的情形

【定義】 如果 (X，Y) 的可能值爲有限個或是可數無限，我們稱 (X，Y) 爲二維離散隨機變數。亦卽 (X，Y) 的可能值可記爲 (x_i，y_i)；$i=1, 2, \cdots\cdots n$，$j=1, 2, \cdots\cdots m$

如果 (X，Y) 爲歐幾里得平面上不可數集合內之所有值，則 (X，Y) 稱爲二維連續隨機變數，[例如：如果 (X，Y) 爲矩形 $\{(x, y) \mid a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$ 或圓 $\{(x, y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$ 內之所有值，我們就說 (X，Y) 爲二維連續隨機變數]

【附註】 (a)非正式地說，如果 (X，Y) 代表一個隨機實驗的結果，在此

實驗中我們已測知X和Y的特性，則（X，Y）為二維隨機變數。

(b)可能（X，Y）的一個分量X是離散的，而另一分量Y是連續的，但大多數我們所討論的，不是兩個都是連續，就是兩個都是離散的。

(c)在很多情形裏，當X和Y同時被考慮時，通常代表一實驗的結果，如上例所述：X和Y代表一個人的身高和體重………等等。但這種關係並不一定存在。如X可能是電路中某一時刻的電流量，然而Y却可能是室內當時的溫度，而我們則可視（X，Y）為二維隨機變數。在大部分的實例中，有很多明確的理由要同時考慮X和Y。

如同一維的情況，我們將描述（X，Y）的機率分配。

【定義】(a)（X，Y）為二維隨機變數，其每一個可能的結果（x_i，y_i）有一數值$p(x_i, y_i)$與之對應，代表$P(X=x_i, Y=y_i)$，且滿足下列條件

(1)　$p(x_i, y_i) \geq 0 \quad \forall (x, y)$

(2)　$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_i) = 1$　　（6－1）

在（X，Y）的值域空間內的所有值（x_i，y_i）所定義的函數p，稱為（X，Y）的機率函數。

三元基（triples）（x_i，y_j，$p(x_i, y_j)$）i，$y=1$，2，3……所組成的集合有時稱為（X，Y）的機率分配。

(b)令（X，Y），為歐幾里得平面上某區域R內所有值的二維連續連續隨機變數，其聯合機率密度函數f，滿足下列條件

(3)$f(x, y) \geq 0$，　　$(x, y) \in R$

(4)　$\iint_R f(x, y)\, d_x d_y = 1$　　（6－2）

【附註】(a)如同質量的分佈，在平面上的某區域有單位質量均勻分佈。在不連續的情況下，所有的質量集中在有限或可數無限的地方$p(x_i, y_i)$位於點（x_i，y_i）。

(b)條件(4)說明在曲面$z=f(x, y)$下的體積等於1。

(c)如同在一維的情況，$f(x, y)$並不代表任何事物的機率，然而對於足夠小的$\triangle x$，$\triangle y$而言$f(x, y)\triangle x \triangle y$近似於$p(x \leq X \leq x+\triangle x, y \leq Y \leq y+\triangle y)$。

(d)如同一維的情況，若（x，y）$\notin R$，則$f(x, y)=0$，因此我們可視f定義於平面上的所有點（x，y），而且(4)可寫成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$$

(e)我們將再隱藏二維隨機變數（X，Y）的函數特性，我們應常寫成形如P〔$X(s)=x_i$，$Y(s)=y_j$〕的型態，又若設有任何問題，可記成$p(x_i, y_i)$。

(f)又如同一維的情形，（X，Y）的機率分配是由與原樣本空間S有關的事件之機率所導出來的。然而我們主要關注的是（X，Y）的值，因而直接討論（X，Y）的值域空間，但讀者不應迷糊的是，對於任何事件$A \subset S$，$p(A)$已知則（X，Y）的值域空間內事件的機率也被決定了，亦即，若B在（X，Y）的值域空間內，我們有

$$P(B)=P[(X(s),Y(s))\in B]$$
$$=P[s \mid (X(s),Y(s))\in B]$$

後面的這個機率，對應於S內的一事件，同此B的機率就被決定，亦即B和$\{s \mid (X(s),Y(s))\in B\}$爲一對等事件，見圖6－2

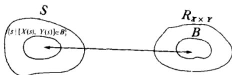


圖6－2

如果B在（X，Y）的值域空間內，且（X，Y）爲不連續，則

$$P(B)=\sum_B\sum p(x_i, y_j) \qquad (6-3)$$

亦即對所有$(x_i, y_i)\in B$的i，j求和又若（X，Y）爲連續的，則

$$P(B=\iint_B f(x,y)dxdy \qquad (6-4)$$

【例題6－1】　有兩條生產線生產一種物品，其每天的生產能量爲第一天5件，第二天3件。而實際的生產量則爲一隨機變數（X，Y），X，Y各代表每條生產線的實際產量。表6－1列出了（X，Y）之散佈機率。定義$p(x_i, y_i)=p(X=x_i, Y=y_i)$，例如$p(2,3)=P(X=2, Y=3)=0.04$　（查表6－1得知）

定義　$B=$｛第一條生產線比第二條生產線，產量較多的所有情形｝。

我們可以知道

$$P(B)=0.01+0.03+0.05+0.07+0.09+0.04+0.05+0.06+0.08+0.05+0.05+0.06+0.06+0.05=0.75$$

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

表 6 － 1

【例題6 － 2】一電燈炮製造廠商是按訂單製造，假設一月和二月的訂單數目爲 (X, Y)，則此 (X, Y) 爲二維連續隨機變數，其 pdf 如圖 6 － 3 所示

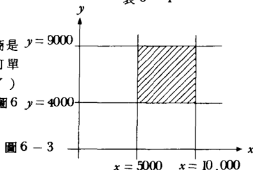


圖 6 － 3

$$f(x,y)=c \qquad 若\ 5{,}000\le x\le 10{,}000\ \ and\ \ 4000\le y\le 9000$$
$$=0 \qquad 其他情形$$

爲求 c，我們知道 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{4,000}^{9,000}\int_{5,000}^{10,000} f(x,y)\,dx\,dy = c\,(5000)^2$$

因此 $c=(5000)^{-2}$，又若 $B=\{x\ge y\}$ 我們得到

$$P(B)=1-\frac{1}{(5,000)^2}\int_{5,000}^{9,000}\int_{5,000}^{y} dx\,dy$$
$$=1-\frac{1}{(5,000)^2}\int_{5,000}^{9,000}[\,y-5,000\,]\,dy=\frac{17}{25}$$

注意，上例中 (X, Y) 中之值必須爲整數，因爲我們不可能所造燈炮的數量爲分數的，然而假定在理想情況下，我們允許 X 值在 5,000 到 10,00 之間。

【例題6 － 3】 假定二維連續隨機變數 (X, Y) 之 pdf 爲

$$f(x,y)=x^2+\frac{xy}{3},\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$$
$$=0 \qquad 其他情況$$

因爲 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_0^2\int_0^1 \left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy$$

$$=\int_0^2 \frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{6}\Big|_{x=0}^{x=1}dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{6}\right)dy=\frac{1}{3}y+\frac{y^2}{12}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{12}=1$$

設$B=\{x+y\geq 1\}$如圖6－4，我們將由$1-P(\overline{B})$得$P(B)$的值，此地$\overline{B}=\{x+y<1\}$，因此

$$P(B)=1-\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dydx$$

$$=1-\int_0^1\left[x^2(1-x)+\frac{x(1-x)^2}{6}\right]dx$$

$$=1-\frac{7}{72}=\frac{65}{72}$$

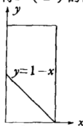


圖6－4

研究一維隨機變數時，我們發現累積分佈函數（cumulative distribution）F，扮演重要的角色，在二維情況中，我們定義累積函數如下

【定義】 令(X,Y)是二維隨機變數，則累積分配函數（Cumulative distribution function, cdf）F，被定義如下

$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)$

【註】 F是兩個變數的函數，有類似於一維cdf的性質（見4－5節），我們僅將討論下列重要性質。

如果F是二維隨機變數的cdf，且具有pdf f

則 $\partial^2 F(x,y)/\partial x\partial y=f(x,y)$此地，$F$是可微的

此結果類似於定理4－4，在此定理中，我們證得

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ 此地f是一維隨機變數x的pdf

§6－2 邊際及條件機率分配

(Marginal and Conditional Probablity Distributions)

對於每一個二維隨機變數(X,Y)我們對應有兩個一維隨機變數，X和Y。亦即我們將注意於X和Y的機率分配情形。

【例題6－4】 我們再考慮例6－1，另外也計算邊際值亦即如表6－2所示，分別在第6直行（column）和第4橫列（Row）中的Sum值。也代表了Y

和X的機率分配情形。

表6－2

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Sum
0	0	0.01	0.03	怕.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
Sum	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1.00

例如$P(Y=1)=0.26$，$P(X=3)=0.21$……等，因爲有表6－2的出現，當我們討論二維連續或是離散隨機變數（X，Y）時，常常涉及X的邊際分配或是Y的邊際分配。

若（X，Y）是不連續機變數時，因$X=x_i$ 必須和某$Y=y_i$，且只能和一個$Y=y_i$同時發生，因此

$$p(x_i)=P(X=x_i)=P(X=x_i\ ,Y=y\ ,\text{ or }X=x_i\ ,Y=y_2\ \text{ or}\cdots\cdots)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i\ ,y_j)$$

對x_1，x_2……所定義的函數p，代表X的邊際機率分配（the marginal probability distribution）。同樣我們定義Y的邊際機率分配爲

$$q(y_j)=P(Y=Y_j)=\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i\ ,y_j)$$

當（X，Y）是連續隨機變數時，令f是（X，Y）的 joint pdf，我們定義g和h，分別爲X和Y的邊際機率函數。

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x\ ,y)\,dy \qquad ; \qquad h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

這些pdf分別相當於X和Y的基本pdf，如

$$P(c\leq X\leq d)=P[c\leq X\leq d\ ,-\infty<Y<\infty]$$

$$=\int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x\ ,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_c^d g(x)\,dx$$

【例題6－5】 火箭引擎發動時，有兩個特性，一是推力X，另一是混合比Y。設（X，Y）是二維連續隨機變數，其 joint pdf爲

$$f(x, y) = 2(x+y-2xy) \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$
$$= 0 \qquad 其他情形$$

（註：此地中的單位改變，使其值在 0 到 1 之間）

因此 X 的 marginal pdf 爲

$$g(x) = \int_0^1 2(x+y-2xy)\,dy = 2\left(xy+\frac{y^2}{2}-xy^2\right)\Big]_0^1$$
$$= 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

故 X 均勻分配在〔0，1〕上

而 Y 之 marginal pdf 爲

$$h(y) = \int_0^1 2(x+y-2xy)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}+xy-x^2y\right)\Big]_0^1$$
$$= 1 \qquad 0 \le y \le 1$$

同樣 Y 也均勻分配在〔0，1〕上

【定義】 如果具有條件

$$f(x, y) = 常數 \qquad \forall (x, y) \in R$$
$$= 0 \qquad 其他情形$$

則我們說二維連續隨機變數均勻分配在歐幾里得平面（Euclidean plane）上的一區域 R

因爲 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$，所以上面的常數必須等於 $1/$ 面積 R，當然 R 的面積是有限的而且大於 0

【註】 此定義類似於一維的情況。

【例題6－6】 若二維隨機變數（X，Y）均勻分配在圖 6－5 的陰影區域 R 上，則 $f(x, y) = 1/$ 面積 R，$(x, y) \in R$

我 我們知道

$$R的面積 = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{6}$$

因此 joint pdf 爲 $f(x, y) = 6 \qquad (x, y) \in R$

$$= 0 \qquad (x, y) \notin R$$

在以下的方程式中，我們可以求得 x 和 y 的 marginal pdf

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \int_{x^2}^{x} 6\,dy$$
$$= 6(x-x^2) \qquad 0 \le x \le 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx$$
$$= 6(\sqrt{y}-y) \qquad 0 \le y \le 1$$

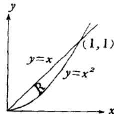


圖6－5

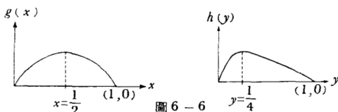


圖 6 － 6

這兩個marginal pdf 的圖形如圖 6 － 6 所示

很自然的，我們可以瞭解條件機率的概念

【例題6－7】 再考慮例 6 － 1 和例 6 － 4 的情形，假設我們要計算$P(x=2 \mid y=2)$，根據條件機率的定義，我們知道

$$P(x=2 \mid y=2)=\frac{P(X=2, Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{0.05}{0.25}=0.20$$

對於不連續的 (X, Y)，通常我們是這樣計算的

$$p(x_i \mid y_i)=P(X=x_i \mid Y=y_i)=\frac{P(x_i, y_i)}{q(y_j)} \qquad (6-5)$$

$$if \quad q(y_j)>0$$

$$q(y_j \mid x_i)=P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(x_i, y_j)}{p(x_i)} \qquad (6-6)$$

$$if \quad p(x_i)>0$$

【註】 對所給的 j 值，$p(x_i \mid y_j)$ 滿足機率分配之所有條件。不但 $p(x_i \mid y_j) \geq 0$，而且

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i \mid y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}=\frac{q(y_j)}{q(y_j)}=1$$

若 (X, Y) 隨機變數是連續的，則條件機率的演算就有些困難，因爲對任意值 x_0，y_0，都得到 $P(X=x_0)=P(Y=y_0)=0$，我們將有以下的定義。

【定義】 設 (X, Y) 是連續的二維隨機變數，聯合機率密度函數（joint pdf）爲 f，X和Y分別是X和Y的marginal pdf

已知$Y=y$，則X的條件 pdf，定義爲

$$g(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{h(y)} \qquad h(y)>0 \qquad (6-7)$$

已知$X=x$，則Y的條件 pdf 定義爲

$$h(y \mid x)=\frac{f(x, y)}{g(x)} \qquad g(x)>0 \qquad (6-8)$$

【附註】 (a)上面的條件機率密度函數，滿足所有的一維機率密度函數，因此，對某一定數 y，我們有 $g(x \mid y) \geq 0$

而且 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x \mid y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)}\,dx$

$$= \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

$$= \frac{h(y)}{h(y)} = 1$$

同理 $h(y \mid x)$ 也可以同樣的方法，求得其結果

因此，(6 − 7) 分別在 R_x 和 R_y 上定義 pdf

(b)對 $g(x \mid y)$，我們可以予一個很直覺的解釋。譬如說我們假想將一個由 joint pdf f 和平面 $y = c$，所表示的面，切成薄片。每個平面 $y = c$ 和面 $z = f(x, y)$ 的交點，將決定一個一維的機率密度函數 (one-dimensional pdf) 稱爲 X 在 $Y = c$ 的 pdf 此即 $g(x \mid c)$。

(c)假設 (X, Y) 分別代表一個人的身高和體重，f 爲 (x, y) 的 joint pdf，g 爲 X 的marginal pdf (不考慮 Y) 因此

$\int_{5.8}^{6} g(x)\,dx$ 將代表事件 $\{5.8 \leq X \leq 6\}$ 的機率，而無視於體重 Y。 $\int_{5.8}^{6} g(x \mid 150)\,dx$ 可被解釋爲 $P(5.8 \leq X \leq 6 \mid Y = 150)$ 嚴格說來，這樣的條件機率是沒有被定義的，因爲 $P(Y = 150) = 0$，然而，我們可以用上面的積分以定義此種機率。

【例題6 − 8】 參照例6 − 8，我們知道

$$g(x) = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$h(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \frac{y}{6} + \frac{1}{3}$$

因此

$$g(x \mid y) = \frac{x^2 + xy/3}{1/3 + y/6} = \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$h(y \mid x) = \frac{x^2 + xy/3}{2x^2 + 2/3(x)} = \frac{3x^2 + xy}{6x^2 + 2x} = \frac{3x + y}{6x + 2}$$

$$0 \leq y \leq 2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

要檢查 $g(x \mid y)$ 是否確爲 pdf，我們有

$$\int_0^1 \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}\,dx = \frac{2 + y}{2 + y} = 1 \qquad \forall\, y$$

同理，也可以查驗得 $h(y \mid x)$ 也是個 pdf

§6－3　獨立隨機變數

(Independent Random Variables)

正如我們定義事件 A 和 B 獨立的觀念一樣，我們現在要定義獨立隨機變數。在一般的情況下，如果 X 的結果不會影響 Y 的結果，則稱 X 和 Y 是獨立隨機變數，這是個極為重要的觀念，而且在很多的情況下，我們如此的假設被證明是合理的。

【例題6－9】　兩個放射性的物質相隔某些距離，正在放射 X 質點。假設在某一時間內，我們觀察兩小時並記錄其放射出的質點數。假設被試驗的為隨機變數 X_1 和 X_2，分別代表從第一個放射源所放射出的物質，在第一個小時和第二個小時的質點個數。而 Y_1 和 Y_2，也分別代表第二個放射源所放射出的物質，在第一個和第二個小時內的質點個數。很清楚的，我們可以知道（X_1 和 Y_1）或（X_1 和 Y_2）或（X_2 和 Y_1）或（X_2 和 Y_2）都是互相獨立的隨機變數。因為 X_i 只與第一個放射源的特性有關，而 Y_i 則只與第二個放射源有關，我們應該沒有任何理想去假想這兩放射源會相互影響。但當我們考慮 X_1 和 X_2 是否為獨立時，事情就可不這樣簡單了，第一小時內放射出的質點個數，會不會影響第二小時內放射出的質點個數呢？為了回答此問題，我們得要知道關於這放射性的特性的一些資料，然而，剛開始，我們不能假定 X_1 和 X_2 是獨立的。

讓我們將上面獨立隨機變數的觀念，解釋的更具體和詳細些：

【定義】　(a)設（X, Y）為二維離散隨機變數。若且唯若 $p(X_i, Y_j) = p(x_i)q(y_j)\ \forall_i, \forall_j$ 則 X 和 Y 是獨立隨機變數，亦即 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)\ \forall_i, \forall_j$

(b)設（X, Y）為二維連續隨機變數，若且唯若 $f(x, y) = g(x)h(y)\ \forall(x, y)$，則 X 和 Y 是獨立隨機變數，此處 f 為 joint pdf（聯合機率密度函數），g 和 h，分別是 X 和 Y 的 marginal pdf（邊際機率密度函數）

【附註】　如果我們將此獨立隨機變數的觀念和事件的獨立的定義比較，其相似之處是很明顯的。下面的定義將告訴我們，從另外的一種方式去定義獨立隨機變數。

【定理6－1】

(a)令（X, Y）為二維離散隨機變數，若且唯若 $p(x_i \mid y_i) = p(x_i)\ \forall_i, \forall_j$，則 X 和 Y 是獨立的。（亦即，對所有的 i 和 j 而言，也有 $q(y_j \mid x_i) = q(y_j)$）。

(b)令（X, Y）為二維連續隨機變數，若且唯若 $g(x \mid y) = g(x)\ \forall x, \forall y$ 則 X 和 Y 是獨立的，或者說是若且唯若 $h(y \mid x) = h(y)\ \forall x, \forall y$

【證明】 見習題6－10

【例題6－10】 假設有一架機器早上做一種工作，下午做另一種工作，令X和Y分別代表機器在早上和下午發生故障的次數，（X，Y）的聯合機率密度分配如表6－3所示

Y \ X	0	1	2	$q(y_j)$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$p(x_i)$	0.2	0.4	0.4	1.0

表6－3

經由簡易的計算，我們可以知道表6－3內所有的項

$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$

於是X和Y是獨立隨機變數。（和例3－7比較）

【例題6－11】 設X和Y分別代表兩架電子儀器的壽命，並假定其 joint pdf（聯合機率密度函數），爲

$f(x, y) = e^{-(x+y)} \qquad x \geq 0 \quad y \geq 0$

因爲 $e^{-(x+y)}$可以化成$e^{-x} \cdot e^{-y}$，所以X和Y是獨立的

【例題6－7】 假設$f(x, y) = 8xy$，$0 \leq x \leq y \leq 1$（其定義域如圖6－7之黑影部份所示），雖然f是表示乘數的關係，應該可說是獨立的，可是因爲其定義域爲 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 受此限制，故X和Y不是獨立的。如果已知了x，則y只能大於等於x，小於等於1。因此X和Y彼此並不獨立。

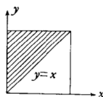


圖6－7

【附註】 由邊際機率分配（marginal probalility distribution）的定義，（不論是在離散或連續的情況），顯然聯合機率分配（joint probalility distribution）爲唯一決定邊際機率分配的條件。亦即由 joint pdf f 可以得到marginaj pdf g 和 marginal pdf h；但反之却不然。亦即，我們無法從邊際機率密度函數（marginal pdf）g和h中決定聯合機率密度函數（jiint pdf）f只有當X和Y是獨立時，才會成立，因爲這種情況下

$f(x, y) = g(x)h(y)$

下面的定義，將告訴我們對於獨立隨機變數的定義，和我們先前對於獨立事件的定義是一致的。

【定理6－2】 假設（X，Y）爲二維隨機變數，A和B兩事件，其發生與否分別決定於X和Y。（亦即A是R_x的部份集合，B是R_y的部份集合），如果X和Y是獨立隨機變數的話，我們得到 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

【證明】

（只考慮連續情形）

$$P(A\cap B)=\int_A\int_B f(x,y)\,dx\,dy=\int_A\int_B g(x)h(y)\,dx\,dy$$

$$=\int_A g(x)\,dx\int_B h(y)\,dy$$

$$=P(A)P(B)$$

§6－4　隨機變數函數 (Functions of a Random Variables)

在定義隨機變數X時，我們強調X是一個由樣本空間S映至實數的函數。在定義二維隨機變數（X，Y）時，我們涉及到一對函數$X=X(s)$，$Y=Y(s)$，其中每一個均定義在某些實驗的樣本空間上，且對於每一個$s\in S$，均有一個指定的實數與之對應，於是產生二維向量〔$X(s)$，$Y(s)$〕。

我們現在考慮一個函數$Z=H_1$（X，Y），是由二個隨機變數X和Y所組成的函數，顯然$Z=Z(s)$也是一個隨機變數。考慮下面每個步驟的結果：

(a)進行一個實驗　，且得到其結果s。

(b)計算$X(s)$和$Y(s)$的數目。

(c)計算$Z=H_1$〔$X(s)$，$Y(s)$〕的數目。

很顯然的，Z的值決定於s，s是實驗ε的最初結果。亦即$Z=Z(s)$是一個函數，對於每一個$s\in S$均有一實數$Z(s)$與之對應。因此Z是隨機變數。有一些我們應該注意的比較重要的隨機變數是$X+Y$，XY，X/Y，min（X，Y），max（X，Y）……等。

在前一章中，我們曾經給予解釋的一維隨機變數的問題，又再度引起我們注意：即已知聯合機率密度函數（X，Y），則$Z=H_1$（X，Y）的機率分配將會是如何呢？（針對這個問題，前章中所有的每個討論，我們必須要淸楚，這機率分配是由Z的樣本空間R_z所產生的）

如果（X，Y）是個離散隨機變數，這個問題就很容易解決。假設（X，Y）的分配有如例題6－1和6－4中所給的，則下列的（一維）隨機變數，是很引人注意的

$U=min$（X，Y）＝兩生產線的最低產量

$V=max$（X，Y）＝兩生產線的最高產量

$W=X+Y$＝兩生產線的總產量

如果我們想要得到U的機率分配，我們必須如下演算：U的可能值是0，1，2和3，爲了計算$P(U=0)$

我們發現$U=0$，若且唯若下面的情況發生：

$X=0$，$Y=0$　或　$X=0$，$Y=1$　或　$X=0$，$Y=2$　或

$X=0$，$Y=3$　或　$X=1$，$Y=0$　或　$X=2$，$Y=0$　或

$X=3$，$Y=0$　或　$X=4$，$Y=0$　或　$X=5$，$Y=0$

因此$P(U=0)=0.28$。其他與U有關的機率也可以類似的方法獲得。所以U的機率分配可以歸納為u：0.1.2.3 $P(u=\mu)$：0.28，0.30，0.25，0.17 同理，亦可得V和W的機率分配。（見習題6－9）

如果(X, Y)為二維連續隨機變數，而且若$Z=H_1(X, Y)$是(X, Y)的連續函數，則Z將是連續（一維）隨機變數，要尋找其pdf較為困難。為了解決這個問題，我們需要討論下面的一個定理，且讓我們先行指過其基本概念。

在求$Z=H_1(X, Y)$的pdf時，為了簡單起見，常介紹第二個隨機變數$W=H_2(X, Y)$，且要先得到Z和W的 joint pdf如$k(Z, W)$，由$k(Z, \omega)$，我們可將$k(Z, \omega)$對ω積分得到我們想要的Z的pdf，如$g(Z)$，即

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} k(z, w)\, dw$$

剩下的問題為(1)如何找Z和W的pdf。(2)如何找適當的$W=H_2(X, Y)$，為了解決第(2)問題，我們通常是選擇最簡單的W。目前，W所扮演的是中間的角色，我們真正的興趣並不在此。為了求Z和W的 joint pdf，我們導證定理6－3。

【定理**6－3**】　假設(X, Y)為二維連續隨機變數，其pdf為f設$Z=H_1(X, Y)$及$W=H_2(X, Y)$，且假定函數H_1，H_2滿足下列條件。

(a)方程式$z=H_1(x, y)$和$w=H_2(x, y)$為x，y的唯一一組解，而x，y為z和w的函數。例如$x=G_1(z, w)$和$y=G_2(z, w)$

(b)偏微分$\partial x/\partial z$，$\partial x/\partial w$，$\partial y/\partial z$，$\partial y/\partial w$存在，而且為連續。

所以(z, w)的 joint pdf，如$k(z, w)$可以表成下式：$k(z, w)=f[G_1(z, w), G_2(z, w)]\,|J(z, w)|$，此處$J(z, w)$為如下的 2 × 2 行列式

$$J(z, w)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

此行列式稱為轉換$(x, y)\to(z, w)$的 Jacobian，有時也記為$\partial(x, y)/\partial(z, w)$，我們要注意的是對那些對應於使$f(x, y)$不為0的$(x, y)$的$(z, w)$而言，$k(z, w)$將不會為0。

【附註】　(a)雖然我們並不證明此定理，但至少我們要指出需要證明什麼及其困難之處。考慮二維隨機變數(z, w)的 joint cdf，如

$$K(z, w) = P(Z \leq z, W \leq w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{z} k(s, t)\, ds dt$$

此處k是我們所找到的pdf，因爲假定轉換$(x, y) \to (z, w)$爲一對一（見上面的假設(a)）。我們可以X和Y表出與$\{Z \leq z, W \leq w\}$對等的事件。假設此事件記爲C（見圖6－8）亦即若且唯若$\{Z \leq z, W \leq w\}$，則$\{(X, Y) \in C\}$，因此

$$\int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{z} k(s, t)\, ds dt = \iint_{C} f(x, y)\, dx dy$$

因爲假定f爲已知，右邊的積分我們可以求出。對z和w微分即可得到所要的pdf，大部份的高等微積分的書都會導證這些技巧以得到如上所述的結果。

(b)注意上個定理的組果與前面一章中在一維的情況時所得到的結果非常類似。（見定理5－1），$y = H(x)$必須爲單調函數的限制，在此已改爲限制(x, y)和(z, w)的對應必須爲一對一，又$y = H(x)$必須爲可微分函數的限制，也已改爲偏微分存在且要連續。最後所得到的解答，也很類似於前章中一維情況的答果：只變數x和y分別被$G_1(z, w)$，$G_2(z, w)$所取代，$|dx/dy|$則由Jacobian 的絕對值所取代。

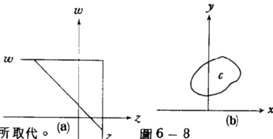


圖6－8

【例題6－13】　假如我們瞄準一個圓形的靶子，其半徑爲1且其圓心落在直角座標系的原點（見圖6－9），假設命中點的座標(x, y)均勻分配在圓上，亦即

$f(x, y) = 1/\pi$ 若(x, y)落在圓內或圓上

$= 0$　其他情形

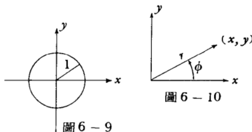


圖6－9　圖6－10

假設隨機變數R，代表點到圓心的距離（如圖6－10）亦即$R = \sqrt{x^2 + y^2}$，我們將如下求得R的pdf g：令$\phi = \tan^{-1}(Y/X)$，因此$X = H_1(R, \phi)$及$Y = H_2(R, \phi)$，此處$x = H_1(r, \phi) = r\cos\phi$，$y = H_2(r, \phi) = r\sin\phi$（我們利用到簡易的極座標）

Jacobian爲

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\phi+r\sin^2\phi$$

$$=r$$

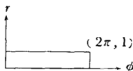


圖 6 − 11

在上面的轉換，xy 平面上的單位圓已映至圖 6 − 11 的 $r\phi$ 平面上的矩形，因此 (ϕ , R) 的 joint pdf 為

$$g(\phi, r)=\frac{r}{\pi} \qquad 0\le r\le 1 \qquad 0\le\phi\le 2\pi$$

於是所要求的 R 的 pdf h 為

$$h(r)=\int_0^{2\pi} g(\phi, r)\,d\phi=2r \qquad 0\le r\le 1$$

【附註】

此例顯示出，如何明確的表示出這新的隨機變數所有的可能值區域是很重要的。

§6−5 獨立隨機變數的乘積和商的分配

(Distribution of Product and Quotient of Independent Random Variable)

在 X 和 Y 的重要函數中，我們將討論的是和 $S=X+Y$，積 $W=XY$，及除 $Z=X/Y$，我們可以利用本節的方法以求得這些隨機變數在很普通情況時的 pdf 。

在第十一章中，我們將對隨機變數的和，作較詳盡的探討，因此對於 $X+Y$ 的機率分配，我們將延到那時再討論，在下面的兩個定理，我們要考慮隨機變數的乘積和商。

【定理**6−4**】 設 (X , Y) 為二維連續隨機變數，且假設 X 和 Y 為獨立的，因此其 pdf 可寫成 $f(x, y)=g(x)h(g)$，令 $W=XY$，則 W 的 pd pdf p 為

$$p(W)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|du \qquad (6-9)$$

【證明】 令 $w=xy$ 且 $u=x$，於是 $x=u$，$y=w/u$

其 Jacobian 為

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{-w}{u^2} & \frac{1}{u}\end{vmatrix}=\frac{1}{u}$$

因此$W=XY$和$U=X$的 joint pdf 爲

$$s(w,u)=g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|$$

W的邊際機率密度函數（marginal pdf）是由$s(w,u)$對u積分而得，$p(W)>0$時w的值端視於$f(x,y)>0$時的(x,y)值

【附註】　在計算上面的積分式子時，我們可以利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|du$$

$$=\int_0^{\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\frac{1}{u}du-\int_{-\infty}^{0} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\frac{1}{u}du$$

【例題**6－14**】　假設有一電路，其中的電流強度I和電阻R可以某種隨機方式而變動，我們要特別假定I和R爲獨立的連續隨機變數，其pdf爲

$$I:\quad g(i)=2i \qquad 0\le i\le 1$$
$$=0 \qquad 其他情形$$
$$R:\quad h(r)=r^2/9 \qquad 0\le r\le 3$$
$$=0 \qquad 其他情形$$

又引人注意的是電路中的電壓值$E=IR$，設p爲E的pdf

由定理6－4，我們得到

$$p(e)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(i)h\left(\frac{e}{i}\right)\left|\frac{1}{i}\right|di$$

在計算上式的積分時，有些地方需要注意，首先，積分的變數是不能爲負數的，其次爲使積分函數大於零，在積分式中的兩個pdf都得是正數，爲了使g和h的值不爲零，必須滿足下列的條件

$0\le i\le 1$　及　$0\le e/i\le 3$

此兩條件相當於

$e/3\le i\le 1$

因此上面的積分變成

$$p(e)=\int_{e/3}^{1} 2i\,\frac{e^2}{9i^2}\,\frac{1}{i}di$$

$$=-\frac{2}{9}e^2\frac{1}{i}\Bigg|_{e/3}^{1}$$

$$=\frac{2}{9}e(3-e),\quad 0\le e\le 3$$

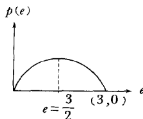


圖6－12

【定理**6－5**】　設(X,Y)是二維連續隨機變數，且X和Y爲獨立的。〔因此(X,Y)的pdf可記爲$f(x,y)=g(x)h(y)$〕

令$Z=X/Y$，則Z的pdf q 爲

$$q(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(vZ)\,h(v)\,|v|\,dv \qquad (6-10)$$

【證明】

令 $z=x/y$ 且 $v=y$，因此 $x=vz$ 且 $y=v$

則其 Jacobian 為

$$J=\begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=v$$

所以 $Z=X/Y$ 和 $V=Y$ 的 joint pdf 等於

$$t(z,v)=g(vz)\,h(v)\,|v|$$

$t(z,v)$ 對 v 積分，即得 K 的邊際機率密度函數（marginal pdf）

【例題 6－15】 設（X，Y）為二維連續隨機變數，且設 X 和 Y 為獨立隨機變數，其 pdf f 和 g，各為

$$f(x)=e^{-x} \qquad x\geq 0$$
$$=0 \qquad \text{其他情形}$$
$$g(y)=2e^{-2y} \qquad x\geq 0$$
$$=0 \qquad \text{其他情形}$$

較引人興趣的是隨機變數 X/Y，代表壽命的比率

令 q 為 Z 的 pdf

由定性 6－5，我們得到 $q(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)\,h(v)\,|v|\,dv$

因為 X 和 Y 的值必須為非負數，上面的積分只須對積分變數的正值積分就可以了。又只有當兩個 pdf 都是正數時，被積函數才是正數，亦即必須 $v\geq 0$，$vz\geq 0$ 因為 $z>0$ 故 $v\geq 0$，於是上式變為

$$q(z)=\int_0^{\infty} e^{-vz}\,2e^{-2v}\,v\,dv=2\int_0^{\infty} v e^{-v(2+z)}\,dv$$

利用部分積分法，可以得到

$$q(z)=\frac{2}{(z+2)^2} \qquad z\geq 0$$

見圖 6－13

同理，很簡單可以證明

$$\int_0^{\infty} q(z)\,dz=1$$

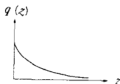


圖 6－13

§6－6 n 維隨機變數

(n-Dimensional Random Variables)

到目前為止，我們的討論僅限於二維隨機變數，如本章開始所言，我們也得要注意到三維或更多維的隨機變數的特性。

我們將只對 n 維隨機變數做很簡略的概紹，大部分的二維隨機變數的觀念，都可以推廣到 n 維上面來，我們也僅考慮連續的情況。（參看本章末了的附註）

假設（x_1，x_2……x_n）為 n 維空間某些區域內之所有值，亦即，其值為 n 維向量

$$[x_1(s), x_2(s), \cdots\cdots x_n(s)]$$

我們描述（x_1………x_n）的機率分配的特性如下，存在一個 joint pdf 滿足下列的條件

(a)　$f(x_1 \cdots\cdots x_n) \geq 0$　　　$(x_1 \cdots\cdots x_n)$

(b)　$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 \cdots\cdots x_n)\, dx_1 \cdots\cdots dx_n = 1$

藉這個 pdf，我們定義

$$P[(x_1, \cdots\cdots x_n) \in C] = \int \cdots\cdots_C \int f(x_1 \cdots\cdots x_n)\, dx_1 \cdots\cdots dx_n,$$

其中 c 為（x_1……x_n）之值域空間的部分集合

對於每個 n 維隨機變數，我們可聯想到一些較低維的隨機變數，例如，$n=3$，則

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 = g(x_3)$$

其中 g 為一維隨機變數 x_3 的邊際機率密度密度函數（marginal pdf）。而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = h(x_1, x_2)$$

此處 h 為二維隨機變數（x_1，x_2）的 joint pdf

又獨立隨機變數的觀念，也是一樣很容易引伸，我們說（x_1，……x_n）為獨立隨機變數，若且唯若其 joint pdf $f(x_1, \cdots\cdots x_n)$ 可以被分解為

$$f(x_1, \cdots\cdots x_n) = g_1(x_1) \cdots\cdots g_n(x_n)$$

有很多情況，我們要考慮到 n 維隨機變數，隨便舉一些例子如下：

(a)假設我們研究某一暴風雨的雨量模型，設有五個觀測所，令 x_i 代表第 i 站站的雨量，則我們所考慮的是一個五維的隨機變數（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）。

(b)當我們重複測量某一隨機變數 X 時，n 維隨機變數的應用就顯得很重要了！假設我們想要知道一電子管的壽命長度 X，一廠商製造很多這種電子管，我們試驗 n 支此種電子管，令 x_i 代表第 i 支電子管的壽命長度，$i=1, 2 \cdots\cdots n$，因此（x_1，……x_n）是個 n 維隨機變數，假設每一個 x_i 都有相同的機率分配，（因為每支電子管，都是以同樣的方法製造），假定每個 x_i 都是獨立的隨機變數（因為每支電子管的製造，彼此互不影響），則我們可以假定 n 維隨機變數（x_1……x_n）是由獨立且有相同分

配的分量 x_1，x_2，……x_n 所組成。（雖然 x_1 和 x_2 有相同的分配，但並不一定有相同的值）

(c)令 $X(t)$ 表某企業公司在時間 t 所需用的電力，對於固定的 t，$X(t)$ 是個一維隨機變數，然而我們却想知道在 n 個時間內的用電量，如 $t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n$，因此我們希望研究 n 維隨機變數〔$X(t_1), X(t_2) \cdots\cdots X(t_n)$〕。這類型式的問題，已經有更進一步的探討。

【附註】 我們曾經提到過"n 維空間"的觀念，讓我們歸納一些要用到的基本觀念。

對於每個實數 x，我們可以在實數線上找到一點與之對應，反之亦然。同樣對於一對實數（x_1，x_2）我們也可以在直角座標平面上找到一點與之對應，反之亦然，最後，對於每三個實數所組成的（x_1，x_2，x_3）我們也可以在三維直角座標平面上，找到一點與之對應，反之亦然。

在很多的問題裏，我們常涉及到由 n 個實數所成的集合，如（x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$），也稱之為 n 一序對（n－tuple），雖然當 $n > 3$ 時，我們無法繪出其圖形，但我們可以繼續用如前面較低維時所用的幾何術語，於是我們提到 n 一序對（x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$）所決定的"點"。也將定義 n 維空間（或稱歐幾里得 n 維空間，Euclidean n－space）為由所有的（$x_1 \cdots\cdots x_n$）$x_i \in R$，所組成的集合。

雖然我們不實際去計算 n 維積分，但却將找到一很有用的觀念，且有時將會用到以多重積分表示一數量，我們再回想下面的定義。

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$$

此處 A 為（x，y）平面上某區域，此觀念可以推廣到

$$\int \cdots\cdots \int_R f(x_1 \cdots\cdots x_n)\,dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

此處 R 是 n 維空間上某區域。若 f 是二維隨機變數（x，y）上的 joint pdf，則

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$$

代表 P〔（x，y）$\in A$〕，同樣地，如果 f 是（$x_1 \cdots\cdots x_n$）的 joint pdf，則

$$\iint_A f(x, y)\,dx\,dy$$

代表

$$P〔(x_1 \cdots\cdots x_n) \in R〕$$

習題

6－1　假設下表為不連續隨機變數（x，Y）的聯合機率分配（joint probability distribution），試計算所有的邊際及條件分配。

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$

6－2　假設二維隨機變數（X，Y）之聯合機率密度函數 joint *pdf* 為

$f(x, y)=kx(x-y)$，$0<x<2$，$-x<y<x$，

$=0$　　　其他情況

(a)試求常數 k 之值

(b)求 x 的邊際機率密度函數（marginal *pdf*）

(c)求 y 的邊際機率密度函數（marginal *pdf*）

6－3　假設二維隨機變數（x，y）之聯合機率密度函數 joint *pdf* 為

$f(x, y)=x^2+\frac{xy}{3}$，$0<x<1$，$0<y<2$

$=0$　　　其他情形

試求(a)　$P(x>\frac{1}{2})$

(b)　$P(Y<x)$

(c)　$P(Y<\frac{1}{2} \mid X<\frac{1}{2})$

6－4　若從一副撲克牌中隨機選取兩張，令 X 代表所取出是 A 的張數，而 Y 則為取出 Q 的張數。

(a)試求（X，Y）的聯合機率分配函數（joint *pdf*）

(b)求 X 和 Y 的邊際分配（marginal distribution）

(c)試求當 Y 已知時的 X 的條件分配（conditional distribution）同理，也求 X 已知時的 Y 的條件分配。

6－5　試求在 $0<x<1$，$0<y<1$ 時，若 $f(x, y)=ke^{-(x+y)}$ 為

（ x , y ）的聯合機率密度函數，k 應為何值？

6 － 6 假設二維連續隨機變數（ x , y ）均勻分配在由（ 1 , 0 ），（ 0 , 1 ），（ −1 , 0 ），（ 0 , −1 ）四點所組成的正方形上，分別求 X 和 Y 的邊際機率密度函數（ marginal pdf ）

6 － 7 假設一個長方形金屬盤的兩個向量（ x , y ），可以視為獨立的二維連續隨機變數，且其機率密度分配函數 pdf 為

X ： $g(x) = x - 1$ ， $1 < x \le 2$
$= -x + 3$ ， $2 < x < 3$
$= 0$ 其他情形

Y ： $h(y) = \frac{1}{2}$ ， $2 < y < 4$
$= 0$ 其他情形

試求這金屬盤面積 $A = XY$ 的機率密度函數 pdf

6 － 8 令 x 表一電子裝置的壽命，而且 x 是連續隨機變數，其機率密度函數 pdf 是

$f(x) = 1000 / x^2$ ， $x > 1000$
$= 0$ 其他情形

又 x_1 和 x_2 是 x 的兩個獨立決定量（亦即，我們試驗兩個此種裝置的壽命），試求隨機變數函數 $Z = x_1 / x_2$ 的機率密度函數 pdf

6 － 9 試求 6 － 4 節中隨機變數 V 和 W 的機率分配。

6 － 10 證明定理 6 － 1

6 － 11 如圖 6 － 14 P 點有磁力 H，和負載電強強度為 I 的電線之距離為 X 單位，且 $H = 2I / X$，假設 X 為一可變動點，亦即 X 是個連續隨機變數均勻分配在（ 3 , 5 ）上。假定 I 也是連續隨機變數均勻分配在（ 10 , 20 ）上，又 X 和 I 是獨立的變數，試求隨機變數 H 的機率密度函數 pdf

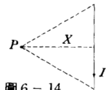


圖 6 － 14

6 － 12 在一定點，光強度的測定公式是 $I = C / D^2$ ，公式中 C 是光源的燭光數，D 是光源和定點的距離。假定 C 是均勻分配在（ 1 , 2 ）上，D 是連續隨機變數，其 pdf 為 $f(d) = e^{-d}$ ，$d > 0$ ，若 C 和 D 是獨立的，試求 I 的 pdf （提示：先求 D^2 之 pdf ，然後再由本章的結論去求）。

6 － 13 當電流強度 I 安培的電流，通過電阻為 R 歐姆的電線時，其產生的功率為 $W = I^2 R$ 瓦特，若 I 和 R 是獨立的隨機變數，且其 pdf 分別是

I ： $f(i) = 6i(1-i)$ $0 \le i \le 1$
$= 0$ 其他情形

R：　$g(r)=2r$　　$0<r<1$

$=0$　　其他情形

試決定隨機變數W的 pdf，並且繪出其圖形。

6－14 假若（x、y）的聯合機率密度函數（joint pdf）為

$f(x,y)=e^{-y}$　　當 $x>0$，$y>x$，

$=0$　　其他情形

(a)求 x 的邊際機率密度函數（marginal pdf）。

(b)求 y 的邊際機率密度函數（marginal pdf）。

(c)計算$P(x>2 \mid y<4)$之值。



6－1

【解】 $P(X=1)=\frac{5}{36}=P(x_1)$　　$P(Y=1)=\frac{1}{4}=g(y_1)$

$P(X=2)=\frac{19}{36}=P(x_2)$　　$P(Y=2)=\frac{14}{45}=g(y_2)$

$P(X=3)=\frac{1}{3}=P(x_3)$　　$P(Y=3)=\frac{79}{180}=g(y_3)$

$$P(x_1 \mid y_1)=\frac{P(x_1,y_1)}{g(y_1)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$P(x_1,y_2)=\frac{0}{\frac{14}{45}}=0$$

$$P(x_2,y_1)=\frac{P(x_2,y_1)}{g(y_1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$P(x_2,y_2)=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{14}{45}}=\frac{5}{14}$$

$$P(x_3 \mid Y_1)=\frac{0}{\frac{1}{4}}=0$$

$$P(x_3 \mid Y_2)=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{14}{45}}=\frac{9}{14}$$

$$P(x_1 \mid Y_3)=\frac{10}{79}$$

$$P(x_2 \mid Y_3)=\frac{45}{79}$$

$$P(x_3 \mid Y_3)=\frac{24}{79}$$

$$\rho(Y_1 \mid x_1)=\frac{P(x_1, Y_1)}{P(x_1)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{36}}=\frac{3}{5}$$

$$g(Y_2 \mid x_1)=0 \qquad g(Y_3 \mid x_1)=\frac{2}{5}$$

$$g(Y_1 \mid x_3)=0 \qquad g(Y_1 \mid x_2)=\frac{6}{19}$$

$$g(Y_2 \mid x_3)=\frac{3}{5} \qquad g(Y_2 \mid x_2)=\frac{4}{19}$$

$$g(Y_3 \mid x_3)=\frac{2}{5} \qquad g(Y_3 \mid x_2)=\frac{9}{19}$$

6－2

【解】 (a) $\int_0^2 \int_{-x}^{x} kx(x-y)\,dy\,dx$

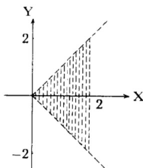
$$=\int_0^2 kx^2y-\frac{kx^2}{2}y^2 \Big|_{-x}^{x} dx$$

$$=\int_0^2 (kx^3+kx^3)\,dx$$

$$=2k\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$$

$=8k=1 \leftarrow pdf$ 之定義

$$\therefore k=\frac{1}{8}$$



(b) $g(x)=\int_{-x}^{x} kx(x-y)\,dy=2kx^3=\frac{x^3}{4}$ ， $0<x<2$

(c) $g_1(y)=\int_y^2 f(x, y)\,dx=\int_y^2 \frac{1}{8}(x^2-xy)\,dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}y\right]\Big|_y^2=\frac{y^3}{48}-\frac{y}{4}+\frac{1}{3}\quad,\quad 0<y<x$$

$$g_2(y)=\int_{-y}^{2}f(x,y)\,dx=\int_{-y}^{2}\frac{1}{8}(x^2-xy)\,dx$$

$$=\frac{5}{48}y^3-\frac{y}{4}+\frac{1}{3}\qquad,\quad -x<y<0$$

6－3

【解】 (a)由$P(X>\frac{1}{2})=P(\frac{1}{2}<x<1\ ,\ 0<y<2)$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{2}\left[x^2+\frac{xy}{3}\right]dydx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)dx=\frac{5}{6}$$

(b)$P(Y\leq X)=\int_0^1\int_0^x\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dydx$

$$=\int_0^1\left[x^2y+\frac{xy^2}{6}\Big|_0^x\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{6}\right)dx$$

$$=\frac{7}{24}x^4\Big|_0^1=\frac{7}{24}$$

(c)$P\left(\dfrac{Y<\frac{1}{2}}{X<\frac{1}{2}}\right)$ 由(a)$P(X<\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$

$$=\frac{P(Y<\frac{1}{2}\ ,X<\frac{1}{2})}{P(X<\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dydx}{\frac{1}{6}}=\frac{5}{32}$$

6－4

【解】 (a)

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{44}{52}\times\frac{43}{51}$	$\frac{4}{52}\times\frac{44}{51}\times 2$	$\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}$
1	$\frac{4}{52}\times\frac{44}{51}\times 2$	$\frac{4}{52}\times\frac{4}{51}\times 2$	
2	$\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}$		

可能第一次爲Q 也可能第二次爲Q 不可能

(b) $q(y=0)=P(0,0)+P(1,0)+P(2,0)$

$$=\frac{42\times 43+4\times 44\times 2+4\times 3}{52\times 51}=\frac{2256}{2652}$$

$q(Y=1)=P(0,1)+P(1,1)$

$$=\frac{4\times 44\times 2+4\times 44}{52\times 51}=\frac{394}{2652}$$

$$q(Y=2)=P(0,2)=\frac{12}{52\times 51}=\frac{12}{2652}$$

$P(X=0)=P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)$

$$=\frac{44\times 43+4\times 44\times 2+4\times 3}{2652}=\frac{2256}{2652}$$

$$P(X=1)=P(1,0)+P(1,1)=\frac{384}{2652}$$

$$P(X=2)=\frac{4\times 3}{52\times 51}=\frac{12}{2652}$$

(c) $$P(x_o \mid Y_o)=\frac{P(x_o Y_o)}{g(y_o)}=\frac{\dfrac{44\times 43}{52\times 51}}{\dfrac{2256}{2652}}=\frac{1892}{2256}$$

$P(x_o \mid Y_1)=\cdots\cdots$ $P(Y_o \mid x_o)=\cdots\cdots$

$P(x_o \mid Y_2)=\cdots\cdots$ $P(Y_1 \mid x_o)=\cdots\cdots$

$P(x_1 \mid Y_o)=\cdots\cdots$ $P(Y_2 \mid x_o)=\cdots\cdots$

$P(x_1 \mid Y_1)=\cdots\cdots$ $P(Y_1 \mid x_1)=\cdots\cdots$

$P(x_2 \mid Y_o)=\cdots\cdots$ $P(Y_o \mid x_2)=\cdots\cdots$

（同法可得） $P(Y_o \mid x_1)=\cdots\cdots$

6－5

【解】 $$\int_o^1\int_o^1 k\,e^{-(x+y)}=\int_o^1 k\,e^{-x}\left[\int_o^1 e^{-y}dy\right]dx$$

$$=k\int_o^1\left[e^{-x}\left(1-\frac{1}{e}\right)\right]dx$$

$$=k\left(1-\frac{1}{e}\right)\left[-e^{-x}\right]\Big|_o^1$$

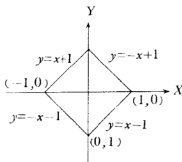
$$=k\left(1-\frac{1}{e}\right)^2=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}$$

6－6

【解】 (1) $f(x, y)=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{2}$

$-1<x<1$

$-1<y<1$



$g_1(x)=\int_{-1}^{+2} f(x, y)\,dy$

$=\int_{-x-1}^{x+1}\dfrac{1}{2}\,dy$

$=\dfrac{1}{2}y\Big|_{-x-1}^{x+1}=x+1 \quad as \quad x<0$

$g_2(x)=\int_{x-1}^{-x+1}\dfrac{1}{2}\,dy=\dfrac{1}{2}[(-x+1)-x+1)]$

$=-x+1$

$\therefore \quad -1<x<1 \qquad g(x)=1-|x| \qquad as \quad x>0$

(2) $h(y)=\int_{-2}^{2} f(x, y)\,dx=\int_{y-1}^{1-y}\dfrac{1}{2}\,dx=\dfrac{1}{2}x\Big]_{y-1}^{1-y}$

$=1-y \qquad as \quad y>0$

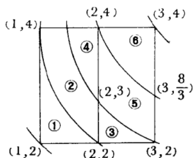
$h(y)=\int_{-y-1}^{1+y}\dfrac{1}{2}\,dy=1+y \qquad as \quad y<0$

$\therefore for \ -1<y<1 \qquad h(y)=1-|y|$

6－7

【解】 見圖

①$P(2\leq A\leq 4)$



$=\int_2^4\int_1^{\frac{4}{y}}\dfrac{1}{2}(x-1)\,dx\,dy$

$=\dfrac{1}{2}\int_2^4 \dfrac{8}{y^2}-\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{2}\,dy$

$=-\dfrac{4}{y}-2\ln y+\dfrac{1}{4}y\Big|_2^4$

$=\dfrac{3}{2}-2\ln 2$

②，③$P(4\leq A\leq 6)$

$=\int_2^3\int_{\frac{4}{y}}^{2}\dfrac{1}{2}(x-1)\,bx\,dy+\int_3^4\int_{\frac{4}{y}}^{\frac{6}{y}}\dfrac{1}{2}(x-1)\,dx\,dy$

$+\int_2^3\int_{\frac{4}{y}}^{\frac{6}{y}}\dfrac{1}{2}(-x+3)\,dx\,dy$

$$=\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x^2}{2}-x\Big|_{\frac{4}{y}}^{2} dy+\frac{1}{2}\int_3^4 \frac{x^2}{2}-x\Big|_{\frac{4}{y}}^{\frac{6}{y}} dy$$

$$+\frac{1}{2}\int_2^3 -\frac{x^2}{2}+3x\Big]_2^{\frac{6}{y}} dy$$

$$=(y+\frac{4}{y}+2\ln y\Big|_2^3)+(\frac{-5}{y}-\ln y\Big]_3^4)+(\frac{-9}{y}+9\ln y$$

$$-2y\Big]_2^3)$$

$$=(-1+\frac{5}{12})+12\ln 3-13\ln 2$$

④，⑤ $P(6\le A\le 8)$

$$=\int_3^4\int_{\frac{6}{y}}^{2}\frac{1}{2}(x-1)\,dxdy+\int_2^3\int_{\frac{6}{y}}^{\frac{8}{y}}\frac{1}{2}(-x+3)\,dydx$$

⑥ $P(8\le A\le 12)$

$$=\int_{\frac{8}{3}}^{4}\int_{\frac{8}{y}}^{3}\frac{1}{2}(-x+3)\,dxdy$$

其他　$P(A)=0$

6－8

【解】 $Z=\frac{X_1}{X_2}$，$V=X_2\Rightarrow X_1=ZV$，$X_2=V$

由定理6－5，$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(ZV)\,h(V)\,|V|\,dV$

$$=10^6\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z}\frac{1}{V^3}\,dV$$

$\because X_1$，$X_2>1000$

$\therefore ZV>1000$，$V>1000$

$ie.\quad V>max(1000,\frac{1000}{z})$

① $z\ge 1\Rightarrow V>1000$

$$g(z)=10^6\int_{1000}^{\infty}\frac{1}{z}\frac{1}{V^3}\,dV=\frac{10^6}{z}(-\frac{1}{2})\frac{1}{V^2}\Big|_{1000}^{\infty}=\frac{1}{2z}$$

② $0<z<1\Rightarrow V>\frac{1000}{z}$

$$g(z)=10^6\int_{\frac{1000}{z}}^{\infty}\frac{1}{z}\frac{1}{V^3}\,dV=\frac{10^6}{z}(-\frac{1}{2})(\frac{1}{V^2})\Big|_{\frac{1000}{z}}^{\infty}=\frac{z}{2}$$

6－9

【解】 $V=max(X,Y)$

$V=0 \quad ie. \quad x=y=0 \qquad \therefore P(v=0)=0$

$V=1 \quad ie. \quad x=0, y=1 \quad or \quad x=1, y=0$

$P(V=1)=0.01+0.01=0.02$

$P(V=2)=0.01+0.03+0.05+0.03+0.04=0.16$

$P(V=3)=0.06+0.04+0.02+0.01+0.05+0.05+0.05=0.28$

$P(V=4)=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$

$P(V=5)=0.09+0.08+0.06+0.05=0.28$

$W=X+Y \qquad P(W)=0 \qquad W=0$

$P(W=1)=0.01+0.01=0.02$

$P(W=2)=0.03+0.01+0.02=0.06$

$P(W=3)=0.05+0.04+0.03+0.01=0.13$

$P(W=4)=0.07+0.05+0.05+0.02=0.19$

$P(W=5)=0.09+0.06+0.05+0.04=0.24$

$P(W=6)=0.06+0.05+0.08=0.19$

$P(W=7)=0.06+0.06=0.12$

$P(W=8)=0.05$

6－10

【解】 (a)(1) $P(x_i \mid y_j)=\dfrac{P(x_i \cdot y_j)}{g(y_i)}=\dfrac{P(x_i)P(y_j)}{g(y_i)}=P(x_i)$

(2) $g(y_j \mid x_i)=\dfrac{P(x_i \cdot y_j)}{P(x_i)}=\dfrac{P(x_i)g(y_j)}{P(x_i)}=g(y_j)$

(b) $g(x \mid y)=\dfrac{f(x, y)}{h(y)}=\dfrac{g(x)h(y)}{h(y)}=g(x)$

$h(y \mid x)=\dfrac{f(x, y)}{g(x)}=\dfrac{g(x)h(y)}{g(x)}=h(y)$

6－11

【解】 令$H=\dfrac{I}{X}$

則由公式 $g(h')=\int_{-\infty}^{\infty} q(xh')\,h(x)\,|x|\,dx$

由於 $3<x<5 \qquad \therefore \quad 3<x<5$ 　決定三種情形

$10<xh'<20 \qquad \dfrac{10}{h'}<x<\dfrac{20}{h'}$

$4<h'<\dfrac{20}{3}$時 $\qquad 3<x<\dfrac{20}{h'}$

即 $\quad \dfrac{10}{3}<h' \leq 4$時 $\qquad 3<x<5$

$$\frac{10}{h'} < x < 5$$

$\therefore$得 $g(h$ [illegible] $x = \dfrac{(800 - 18h'^2)}{80h'^2} \qquad 4 < h' < \dfrac{20}{3}$

$$= \int_3^5 \frac{x^2}{40} dx = \frac{2}{5} \qquad \frac{10}{3} < h' \le 4$$

$$= \int_{\frac{10}{h}}^5 \frac{x^2}{40} dx = \frac{(10h^2 - 40)}{60h^2} \qquad 2 \le h' \le \frac{10}{3}$$

$\therefore$得 $g(h) = \dfrac{(1600 - 9h^2)}{80h^2} \qquad 8 < h < \dfrac{40}{3}$

$$= \frac{1}{5} \qquad \frac{20}{3} < h \le 8$$

$$= \frac{(5k^2 - 80)}{16h^2} \qquad 4 \le h \le \frac{20}{3}$$

6 – 12

【解】 $I = \dfrac{C}{D^2}$ ， 令$K = D^2$

则$C = IK$ ， $D = \sqrt{K}$

又$1 < ik < 2$，$i > 0 \quad \therefore \dfrac{1}{i} < k < \dfrac{2}{i}$

故$g(i) = \displaystyle\int_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}} g(ik)\, h(\sqrt{k})\, \left|\frac{1}{2}\sqrt{k}\right| dk$

$$= \int_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}} \frac{\sqrt{k}}{2} e^{-k}\, dk$$

$$= \int_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}} y^2 e^{-y}\, dy \quad , \quad y = \sqrt{k}$$

$$= -e^{-y}\left[y^2 + 2y + 2\right]\Big|_{\frac{1}{i}}^{\frac{2}{i}}$$

6 – 13

【解】 先决定$I^2 = I'$的pdf

$g(i') = g(i)\left|\dfrac{di}{di}\right| \qquad i^2 = i'$

$$= 6i(1 - i) \cdot \frac{1}{2i} \qquad \therefore 2i\,di = di$$

$= 3(1-i) \qquad \therefore \left|\frac{di}{di}\right| = \frac{1}{2i}$

$= 3(1-\sqrt{i'}) \qquad \Rightarrow \begin{matrix} 0 \le i \le 1 \\ 0 \le i' \le 1 \end{matrix}$

$$P(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(i')\, h\left(\frac{w}{i}\right) \left|\frac{1}{i'}\right| di' \qquad 0 \le i' \le 1$$

$$= \int_{w}^{1} 3(1-\sqrt{i'})\left(\frac{2u}{i'}\right)\left(\frac{1}{i'}\right) di' \qquad 0 \le \frac{w}{i'} < 1$$

$$= \int_{w}^{1} \frac{6w(1-\sqrt{i'})}{i'^2}\, di \qquad \therefore w < i' \le 1$$

$$= 6w\left[(-i'^{-1})\Big|_{w}^{1} + 2i^{-\frac{1}{2}}\Big|_{w}^{1}\right] \qquad \left(\because \begin{matrix} 0 \le i' \le 1 \\ 0 < r < 1 \end{matrix}\right)$$

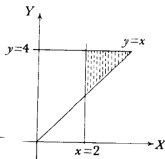
$$= 6 + 6w - 12\sqrt{w} \qquad 0 < w < 1$$

6－14

【解】

(a) $g(x) = \int_{x}^{\infty} e^{-y}\, dy$

$= -e^{-y}\Big|_{x}^{\infty} = e^{-x} \quad x > 0$



(b) $h(y) = \int_{0}^{y} e^{-y}\, dx$

$= ye^{-y} \qquad y > 0$

(c) $P\left(\frac{X>2}{Y<4}\right) = \frac{P(X>2,\ Y<4)}{P(Y<4)}$

$$= \frac{\int_{2}^{4}\int_{x}^{4} e^{-y}\, dxdy}{\int_{0}^{4} ye^{-y}\, dy} = \frac{\int_{2}^{4}(e^{-x}-e^{-4})\, dx}{-xe^{-x} + \int_{0}^{4} e^{-x}\, dx}$$

〔或原式 $= \frac{\int_{2}^{4}\int_{2}^{y} e^{-y}\, dxdy}{\int_{0}^{4} ye^{-ydy}} = \frac{-4e^{-4} - e^{-4} + 2c^{-4} + e^{-2}}{-4e^{-4} - e^{-4} + 1}$

$= \frac{-3e^{-4} + e^{-2}}{-5e^{-4} + 1}$〕

第七章 隨機函數之性質

§7－1 隨機變數的期望值
(The Expected Value of a Random Variable)

我們考慮一個確定關係式 $ax+by=0$，我們將此式視爲 x 和 y 之間的線性關係。常數 a 和 b 爲此關係式的參數（ parameters ），亦即任意選取 a 和 b，我們就可以得到另一個線性函數。在其他的情形下，可能會有更多的參數，來決定這函數的關係式。例如，$y=ax^2+bx+c$，其中有三個參數。但若 $y=e^{-kx}$，此式只要一個參數就可以了。不但一個關係式會因爲參數的不同所影響 a 相反的；一個關係式也能定義適合的參數。如 $ay+bx=0$，則 $m=-a/b$，代表這條直線的斜率。又如果 $y=ax^2+bx+c$，則 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，會產生極大值或是極小值在非確定（ nondeterministic ）或隨機（ random ）數學模式中，參數也可以決定機率分配的特性，這些在前面幾章中，我們當經討論過。在很多的機率分配中，不少的參數會使我們對分配的性質有很大的助益。（就如直線的斜率，告訴我們有關這線性關係式所代表的直線的性質）

【例題7－1】 假設 x 是個連續隨機變數，其機率密度函數 pdf 爲 $f(x)=ke^{-kx}$，$x\geq 0$。爲了查驗這個函數，我們發現

$$\int_0^{\infty} ke^{-kx}\,dx=1,\quad k>0\text{ ,而且 } ke^{-kx}>0,\quad k>0$$

所以 $f(x)$ 是一個機率密度函數，這種分配我們稱之爲指數分配（ exponential distribution ），以後我們會更詳細去討論。

【例題7－2】 有一裝配線生產的產品不一定，不良品的機率是 p，其他的產品不良率也是 p，產品的好壞與其他產品無關。隨機變數 X 代表直到發現第一件不良品時，所需檢查的產品件數。又 D 代表不良品，N 代表良品。實驗的結果可能形爲 $NNNND$，$X(NNNND)=5$。X 的可能值是 $1,2,\cdots\cdots n,\cdots\cdots$。因爲 $X=k$，若且唯若前 $k-1$ 件是良品，第 k 件是不良品。故我們可表示如下 $\{X=k\}:P(X=k)=P(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots\cdots n,\cdots\cdots$

爲了檢查它是否爲機率分配，我們注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}=p\left[1+(1-p)+(1-p)^2+\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=p\frac{1}{1-(1-p)}=1\quad if\quad 0<|p|<1$$

參數 p 爲任意數目，滿足 $0<p<1$

假設隨機變數及其機率分配都指定了，有沒有辦法利用一些恰當的參數來表示機率分配呢？

在回答此問題之前，我們先考慮下面的例子。

【例題7－3】　一電線割斷機將電線切成一定的長度，由於機器的不精確，所切成的電線長度X，可視為均勻分配在〔11.5，12.5〕的隨機變數。標準長度是12吋。如果$11.7 \leq X < 12.2$每段電線可賺$0.25；如果$X \geq 12.2$，電線可再被切割，最後的利潤是$0.10；如果$X < 11.7$，電線被拋棄，損失$0.02經由簡單的統計計算結果，我們知道$P(X \geq 12.2) = 0.3$，$P(11.7 \leq X < 12.2) = 0.5$，$P(X < 11.7) = 0.2$

假設我們切割了很多線段，設為N段。令N_s表$X < 11.7$之電線段數，N_L表$X \geq 12.2$的電線段數，N_R則表$11.7 \leq X < 12.2$之段數，因此總共的利潤是T，

$$T = N_s(-0.02) + N_R(0.25) + N_L(0.10)$$

每段的利潤W，

$$W = (N_s/N)(-0.02) + (N_R/N)(0.25) + (N_L/N)(0.10)$$

【注意】　W是隨機變數，因為N_s，N_R，N_L是隨機變數。

我們已經提過如果重複次數相當多的話，則一事件的相對頻率接近於事件的機率（在第12章中，我們將詳細討論）因此，如果N很大，我們知道N_s/N將接近0.2，N_R/N接近0.5，N_L/N則接近0.3。因此對於很大的N，W的值近於

$$W \simeq (0.2)(-0.02) + 0.5(0.25) + (0.3)(0.1) = \$0.151$$

於是，我們若製造很多的電線，每段電線我們期望能賺$0.151。

0.151稱為隨機變數W的期望值（expected value）。

【定義】　令X是個離散隨機變數，其可能值為x_1，……x_n，設$p(x_i) = P(X = x_i)$，$i = 1, 2, \ldots\ldots n$，…則X的數學期望值$E(X)$，被定義為

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i\, p(x_i) \qquad (7-1))$$

如果級數 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i)$ 絕對收斂，亦即 $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i \mid p(x_i) < \infty$ 這數有時也稱為X的平均值（mean value）。

【附註】　(a)如果X的可能值為有限個，則上面的式子變成$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)x_i$，也可視為$x_1$，$x_2$……$x_n$之"加權平均"（Weiphted average），如果所有的x_i出現機率相同，則

$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} x_i$，此代表$x_1$，$x_2$……$x_n$等$n$個數的算術平均值（arithmetic average）。

(b)投擲一均勻骰子，隨機變數X代表出現的點數，則$E(X) = \frac{1}{6}$

$(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$，這簡單的例子說明$E(X)$值，並不是我們只觀察一次就得到的結果。事實上，$E(X)=\frac{7}{2}$也不是$X$的可能值。而是當我們重複觀察很多次獨立的結果，得$x_1$，$x_2$……$x_n$，然後求這些數目的平均值在通常的情形下，算術平均值是很接近$E(X)$的。譬如說在上述的情況，我們如果投擲骰子很多次，計算各不同結果的平均值，骰子投擲次數愈多，其平均值愈近 7／2。

(c)我們必須注意上述期望值的觀念和一堆數字Z_1，Z_2……，Z_n的平均值的觀念兩者相似之處。我們通常定義Z_1，Z_2……，Z_n的算術平均值為$Z=(\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{\infty} Z_i$又假設我們有一堆數字$Z_1$，$Z_2$，……$Z_k$，其中$Z_i$發生$n_i$次且$\sum_{i=1}^{k} n_i=n$，令$f_i=n_i/n$，$\sum_{i=1}^{k} f_i=1$，我們定義$Z_1'$，$Z_2'$……$Z_k'$的加權平均值（Weighted mean）為$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i Z_i=\sum_{i=1}^{n} f_i Z_i'$雖然上述的加權平均值和$E(X)$的定義極為相似，但我們要知道後者是與理論機率分配有關的數（參數），而前者只是一堆數字混在一起的結果。然而，這只是在表面上的相似，也有更進一步相似之處，我們考慮一個隨機變數X，且令X_1，X_2……X_n是X之n次重複所得的獨立結果（亦即X_1，X_2……X_n代表測量X，共n次的結果）。若$\overline{X}$為這些數的算術平均值，則如在第12章，我們所要討論的一樣，n若夠大，X將接近於$E(X)$，此結果和第12章中的觀念：相對頻率f_A接近$P(A)$，有很大的關連。（當n夠大，重複試驗n次）

【例題7－4】 有一廠商製造的產品，有10％是不良品，其餘90％為良品。如果是不良品，廠商損失＄1，良品則賺＄5。X代表每件產品的淨利潤，則X是個隨機變數，其期望值是$E(X)=-1(0.1)+5(0.9)=\$4.40$。如果大量生產，則因為有10％的產品可能每件損失＄1，90％的產品每件損失＄5，因此最後他將得到的期望值是每件產品賺＄4.40。

【定理】 X是二項分配隨機變數，其參數為p，一共有n次的重複實驗，則$E(X)=np$

【證明】 因為 $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，我們得到

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

（因爲 $k=0$ 那項等於0）令 $s=k-1$，則 k 從0到 n，s 從0到 $n-1$，$k=s+1$　上式成爲

$$E(X)=\sum_{s=0}^{n-1} n\binom{n-1}{s}p^{s+1}(1-p)^{n-s-1}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}p^s(1-p)^{n-1-s}$$

因爲 $\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}p^s(1-p)^{n-s-1}=p+(1-p)^{n-1}=1$

所以上式的 $E(X)=np$

【附註】 上面的結果實在是很直覺的，因爲若假設某事件 A 的機率是0.3，如果我們重複100次，則 A 發生的期望值是 $100\times 0.3=30$ 次，上面對於離散隨機變數的期望値的觀念可以推廣到連續的情形。

【例題 7－5】 一架印刷機一天中發生故障的機率是個常數 $p=0.05$，如果一週內機器沒有發生故障，可淨賺 \$ S，則果有1次或2次故障，可淨賺 \$ R（$R<S$），如果3次或更多次，就要損失 \$ L（假定 S，R，L 均大於0，且如果故障，須等第2天才能修好）。令 X 表一週5個工作天的淨利潤。X 的可能値是 R，S，$-L$，又 B 表每週故障次數，則

$$P(B=k)=\binom{5}{k}(0.05)^k(0.95)^{5-k}\quad k=0,1,\cdots\cdots 5$$

因爲 $X=S$ 若且唯若 $B=0$；$X=R$ 若且唯若 $B=1$ 或 2；$X=-L$ 若且唯若 $B=3$，4，或5，

我們得到

$$E(X)=SP(B=0)+RP(B=1\text{或}2)+(-L)P(B=3,4\text{或}5)$$

$$=S(0.95)^5+R[5(0.05)(0.95)^4+10(0.05)^2(0.95)^3]+(-L)[10(0.05)^3(0.95)^2+5(0.05)^4(0.95)+(0.05)^5]\text{ 元}$$

【定義】 令 X 是個連續隨機變數，其機率密度函數 pdf 爲 f，則 X 的期望值爲

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx \qquad (7-2)$$

可能此不定積分沒有收斂，因此，我們說$E(X)$存在，若且唯若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$ 是有限的。

【附註】 我們必須分別清楚隨機變數的期望值及力學中的質量中心（center of mass）的觀念，如果單位質量沿著直線分佈，分佈點各爲x_1，x_2，……x_n…又質量在x_i的機率爲$p(x_i)$，則對原點而言，$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$代表質量中心。同理，如果單位質量連續而均勻的分佈在一條直線上，$f(x)$代表在x點的質量密度，則$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 可視爲質量中心。亦即$E(X)$可代表機率分配的中心。有時$E(X)$也視爲一種量度中心的趨向，其單位和隨機變數X同。

【例題 7－6】 隨機變數X被定義如下：假設X表某一時間內電子設備使用最高峰的時間（以分爲單位計算），又X是一隨機變數，其pdf如下

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1500)^2}x \qquad 0 \le x \le 1500 \\ &= \frac{-1}{(1500)^2}(x-3000) \qquad 1500 \le x \le 3000 \\ &= 0 \qquad \text{elsewhere} \end{aligned}$$

於是
$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \\ &= \frac{1}{(1500)(1500)}\left[\int_0^{1500} x^2 dx - \int_{1500}^{3000} x(x-3000)dx\right] \\ &= 1500\text{（分）} \end{aligned}$$
如圖 7－1

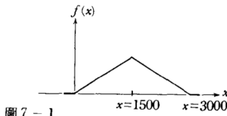


圖 7－1

【例題 7－7】 煤中含灰量（百分比）X，可視爲連續隨機變數其pdf爲

$$f(x) = \frac{1}{4875}x^2 \qquad 10 \le x \le 25$$

因此　$E(X)=\frac{1}{4875}\int_{10}^{25}x^3\,dx=19.5\%$

於是煤炭樣品中的含灰量期望值為 19.5％

【定理 7－2】如果X均勻分配在〔a，b〕上，則$E(X)=\frac{a+b}{2}$

證明　X的pdf是$f(x)=\frac{1}{b-a}$　　$a\le x\le b$

因此　$E(x)=\int_a^b\frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{a+b}{2}$

（注意一下：此期望值代表〔a，b〕的中點，正如我們直覺所期望的）

【註】　我們回想一下：隨機變數X是由樣本空間S映至值域空間Rx的函數，正如我們經常指出的，通常我們所關心的只是值域空間Rx和定義在其上的機率分配。期望值的觀念全部是以值域空間Rx定義的（見 7－2 和 7－2 式），然而，有時我們應觀察X的函數特性？譬如說，如何以$s\in S$（假定S是有限的）來表示（7－1）式呢？

因為對一些$s\in S$，則$x_i=X(s)$，而且因為

$p(x_i)=P\{s:X(s)=x_i\}$

我們可以寫成

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p(x_i)=\sum_{s\in S}X(s)P(s)$$

其中$P(s)$是事件$\{s\}\subset S$的機率，例如：一個實驗將三件產品分為D（不良品）或N（良品），則其樣本空間是

$S=\{NNN,NND,NDN,DNN,NDD,DND,DDN,DDD\}$

如果X定義為不良品件數，而且上面的各個結果均等可能按照 7－3 式，我們知道

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{s\in S}X(s)P(s)\\&=0\cdot(\tfrac{1}{8})+1\cdot(\tfrac{1}{8})+1\cdot(\tfrac{1}{8})+1\cdot(\tfrac{1}{8})+2\cdot(\tfrac{1}{8})\\&\quad+2\cdot(\tfrac{1}{8})+2\cdot(\tfrac{1}{8})+3\cdot(\tfrac{1}{8})\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

當然此結果直接利用 7－1 式可以很容易得到，然而，要利用 7－1 式，我們要先知道$p(x_i)$，亦即要如上的演算才能得到。重要的是只要分布於Rx上的機率分配知道了，（在此，即$p(x_i)$值），我們就能隱藏Rx和S之間的函數關係。

§7－2 隨機變數函數的期望值

(Expectation of a Function of a Random Variable)

【定義】 設X是個隨機變數，且$Y=H(X)$

(a)如果Y是個離散隨機變數，其可能值為y_1，y_2……且若$q(y_i)=P(Y=y_i)$，我們定義

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} y_i q(y_i) \qquad (7-4)$$

(b)如果y是個連續隨機變數其pdf為g，我們定義

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y g(y)dy \qquad (7-5)$$

【附註】 這個定理使$E(Y)$的計算更為容易，因為現在我們要求$E(Y)$，不需先求Y的機率分配，只要知道X的機率分配就足夠了。

【證明】 （我們只證明7－6式，7－7式的證明有些複雜。）

考慮 $\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j)=\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_i H(x_i)p(x_i))$，這兒的內部的和（即$\sum_i H(x_i)p(x_i)$）是對某固定$y_j$，而滿足$H(x_i)=y_j$的所有$x_i$而言的總和。因此在內部的所有$H(x_i)$都是常數，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_i p(x_i)$$

然而 $\sum_i p(x_i)=\sum_i P[x \mid H(x_i)=y_j]=q(y_j)$

因此 $\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j)=\sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j)$

證得了7－6式

【附註】 證明的方法就如同計數方法一樣，將相同的值放在一起。於是，要求1，1，2，3，5,3，2，1，2，2，3之和，我們可以直接加起來，也可以分項求總和，因為有3個1，4個2，2個3，和1個5，因而總和是

$3(1)+4(2)+3(3)+1(5)=25$

【例題7－8】 令V表風速（mph），且設V均勻分配在$[0, 10]$上機翼面上的氣壓$W=0.003V^2$，（單位是$\ell b/ft^2$），試求W的期望值$E(W)$，求$E(W)$有二法

(a)利用定理7－3

$$E(W)=\int_0^{10} 0.003v^2 f(v)dv$$

$$= \int_{0}^{10} 0.003\,v^{2}\,\frac{1}{10}\,dv \quad = 0.1\ \ell b\,/\,ft^{2}$$

(b)利用$E(W)$的定義，我們須先求W的$pdf\ g$，然後計算$\int_{-\infty}^{\infty} w\,g(w)\,dw$，要求$g(w)$，我們發現對$v>0$而言。$w=0.003\,v^{2}$是$v$的單調函數。我們可利用定理5－1而得到

$$g(w)=\frac{1}{10}\left|\frac{dv}{dw}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{3}}\,w^{-\frac{1}{2}} \qquad 0\le w<0.3$$
$$=0 \qquad \text{elsewhere}$$

因此　$E(W)=\int_{0}^{0.3} w\,g(w)\,dw=0.1$

兩種方法，都得到同樣的結果

【例題7－9】　在許多情形，我們只注意隨機變數的大小值，而不太注意其正負值，亦即我們僅討論$|x|$，假設x是個連續隨機變數，其pdf爲

$$f(x)=\frac{e^{x}}{2} \qquad if\quad x\le 0$$
$$=\frac{e^{-x}}{2} \qquad if\quad x>0$$

令$Y=|x|$，爲求$E(Y)$值，我們有兩種方法

(a)利用定理7－3，我們知道

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}(-x)\,e^{x}\,dx+\int_{0}^{\infty}(x)\,e^{-x}\,dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}[1+1]=1$$

(b)利用$E(Y)$的定義，我們須先求$Y=|x|$的$pdf\ \ g$，令G是Y的cdf（累積分佈函數），因此

$$G(y)=P(Y\le y)=P[\,|x|\le y\,]$$
$$=P[-y\le X\le y]$$
$$=2P(0\le X\le y)$$

因爲X的pdf對稱於原點，因此

$$G(y)=2\int_{0}^{y} f(x)\,dx=2\int_{0}^{y}\frac{e^{-x}}{2}\,dx=-e^{-y}+1$$

而Y的pdf爲g，$g(y)=G'(y)=e^{-y}$，$y\geq 0$

所以$E(Y)=\int_0^{\infty} yg(y)dy=\int_0^{\infty} ye^{-y}dy=1$

其結果是一樣的

【例題7－10】 在許多的問題裏，我們可以利用隨機變數的期望值做最佳的決策。假設有一廠商生產某種潤滑油，如果有一段時間放置而不使用，此潤滑油將失去一些特性，令X代表每年訂購的單位數量。（此一單位數量代表1000加侖），若X是個連續隨機變數，且均勻分配在〔2，4〕上

因此pdf爲f，且

$$f(x)=\frac{1}{2} \qquad 2\leq x\leq 4$$

$$=0 \qquad \text{其他情形}$$

如果每售一單位，則可賺＄300，若在一年內設有售出要損失＄100，因爲設有售出必須抛棄。假定廠商必須在每年度開始之前的幾個月內決定其產量，如果他決定生產Y單位數量（Y不是隨機變數），令Z是每年利潤，Z顯然是一隨機變數，因爲它是X的函數，而且$Z=H(X)$

其中 $H(X)=300Y \qquad if\ \ X\geq Y$

$$=300X+(-100)(Y-X) \qquad if\ \ X<Y$$

利用定理7－3求$E(Z)$

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^4 H(x)dx$$

爲求此項積分，我們考慮三種情形：$Y<2$，$2\leq Y\leq 4$和$Y>4$，利用圖7－2和稍加簡化我們得

$$E(Z)=300Y \qquad if\ \ Y\leq 2$$

$$=-100Y^2+700Y-400 \qquad if\ \ 2<Y<4$$

$$=1200-100Y \qquad if\ \ Y\geq 4$$

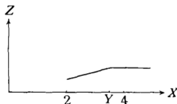


圖7－2

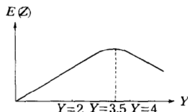


圖7－3

有趣的是廠商如何選取Y值，使其期望值最大；我們將$E(Z)$對Y微分，設為0，亦即$\frac{dE(Z)}{dY}=0$　如此得$Y=3.5$　（圖7－3）

§7－3　二維隨機變數

(Two-Dimensional Random Variables)

我們上面討論的是有關於一維隨機變數的情形的觀念。這些觀念也適用於高維的情況，尤其是對於二維的情形我們有如下的定義

【定義】　設(X, Y)是個二維隨機變數，$Z=H(X, Y)$是(X, Y)的實數函數，因此Z是一個一維隨機變數，我們定義$E(Z)$。

(a)如果Z是連續隨機變數，其pdf為f，則

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z f(z)\,dz \qquad (7-9)$$

如同一維的情形，下面的定理（類似定理7－3）可以被證明

【定理7－4】　令(X, Y)是二維隨機變數，且令$Z=H(X, Y)$

(a)如果(X, Y)是離散隨機變數，且若$p(x_i, y_j)=P(X=x_i, Y=y_j)$，$i, j=1, 2$

$$\text{則}\quad E(Z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} H(x_i, y_j)\,p(x_i, y_j) \qquad (7\text{–}8)$$

(b)如果Z是連續隨機變數，其pdf為f，且

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} Z f(Z)\,dZ \qquad (7-9)$$

如同一維情況，下面的定理（類似定理7－3）可以被證明。

【定理7－4】　(X, Y)是二維隨機變數，且$Z=H(X, Y)$

(a)如果(X, Y)是離散隨機變數，且

$$P(x_i, y_i)=P(X=x_i, Y=y_j) \quad i, y=1, 2, \cdots\cdots$$

則我們得到

$$E(Z)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} H(x_i, y_i)\,p(x_i, y_j) \qquad (7-10)$$

(b)如果(X, Y)是連續隨機變數，其聯合機率密度函數為f，則

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\,f(x, y)\,dx\,dy \qquad (7-11)$$

【附註】　我們不證明此定理，如同在一維的情形。這是一個很有用的結果，因為它告訴我們若要求期望值，不需求Z的機率分配，可直接由(X, Y)的聯合機率密度函數求得$E(Z)$。

【例題7－11】　我們再考慮例6－14，且求$E(E)$，其中$E=IR$，I和

R 是獨立隨機變數，其 pdf 分別是

$$g(i)=2i \quad 0\le i\le 1 \quad ; \quad h(r)=\frac{r^2}{9} \quad 0\le r\le 3$$

我們也發現 E 的 pdf 是 $p(e)=\frac{2}{9}e(3-e)$，$0\le r\le 3$。因為 I 和 R 是獨立隨機變數，(I, R) 之聯合機率密度函數是 I 和 R 之 pdf 的相乘積，即 $f(i, r)=\frac{2}{9}ir^2$，$0\le i\le 1$，$0\le r\le 3$　利用定理 7－4 以求 $E(E)$ 我們得到

$$E(E)=\int_0^3\int_0^1 irf(i, r)\,di\,dr$$

$$=\int_0^3\int_0^1 ir\frac{2}{9}ir^2\,di\,dr$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^1 i^2\,di\int_0^3 r^3\,dr \;=\frac{3}{2}$$

由定義（7－9），我們知道

$$E(E)=\int_0^3 ep(e)\,de=\int_0^3 e\frac{2}{9}e(3-e)\,de$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^3(3e^2-e^3)\,de=\frac{3}{2}$$

§7－4 期望值的性質 (Properties of Expected Value)

我們將列舉一些隨機變數的期望值的重要性質，這些對以後是相當有用的。我們假定所提到的期望值都是存在的，且僅對連續的情況而言。讀者只需要將積分改為求總和就可以知道離散的情況。

【性質 7－1】 如果 $X=C$，C 是常數，則 $E(x)=C$

【證明】

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Cf(x)\,dx$$

$$=C\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

$$=C$$

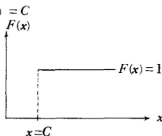


圖 7－4

【附註】 x 等於 C 的意義如下：因為 x 是由樣本空間映至 Rx 的函數，上面的意思就是說 Rx 的元素只有 C，因此 $x=C$ 若且唯若 $P[x(s)=C]=1$，這種觀念以 x 的 cdf 來表示最為恰當。我們可以說 $F(x)=0$，$if\ \ x<C$ 和 $F(x)=1$，$if\ \ x\ge C$（見圖 7－4），這樣的隨機變數有時稱為退化（depenerate）

【性質7－2】　假設C是常數，X是隨機變數，則

$E(Cx)=CE(x)$

【證明】　$E(Cx)=\int_{-\infty}^{\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$=CE(x)$

【性質7－3】　令(x,y)為二維隨機變數，有聯合機率密度函數存在，設$Z=H_1(x,y)$；$W=H_2(x,y)$，則$E(Z+W)=E(Z)+E(W)$

【證明】　$E(Z+W)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[H_1(x,y)+H_2(x,y)]f(x,y)dxdy$

（此處f是(x,y)的聯合機率密度函數）

$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_1(x,y)f(x,y)dxdy$

$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_2(x,y)f(x,y)dxdy$

$=E(Z)+E(W)$

【性質7－4】　X和Y是任意二隨機變數，則$E(X+Y)=E(x)+E(y)$

【證明】　由性質7－3，很快可以知道。因為我們令

$H_1(x,y)=X$，$H_2(x,y)=Y$　就得了

【附註】　(a)由性質7－1，7－2和7－4，我們可以得到下列事實。如果$Y=ax+b$，a，b為常數，則$E(Y)=aE(x)+b$ 即線性函數的期望值，是期望值的線性組合。除非具有線性的關係，否則此結果不一定成立，例如：　$E(x^2)\neq[(Ex)]^2$　$E(\ell n\ x)\neq\ell n\ E(x)$

又如X是＋1或－1的機率都是1／2，則$E(x)=0$，然而

$E(x^2)=(-1)^2(\frac{1}{2})+(1)^2(\frac{1}{2})=1\neq0^2$

(b)通常要以$\frac{1}{E(x)}$或$[E(x)]^{\frac{1}{2}}$表示$E(\frac{1}{x})$或$E(x^{\frac{1}{2}})$是很困難的事，然而有些不等式却是很有用的，例如

(1)如果x值是正數，且期望值有限，則$E(\frac{1}{x})\geq\frac{1}{E(x)}$

(2)如同(1)之假設　$E(x^{\frac{1}{2}})\leq[E(x)]^{\frac{1}{2}}$

【性質7－5】　令x_1，……x_n，為n個隨機變數，則

$E(x_1+\cdots\cdots+x_n)=E(x_1)+\cdots\cdots+E(x_n)$

【證明】 這是由性質 7－4 導出來的，利用數學歸納法可證得。

【附註】 以上的性質，我們得到

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i)$$

【性質 7－6】 令 (x, y) 是二維隨機變數，且 x 和 y 獨立，則 $E(xy)=E(x)E(y)$

【證明】

$$\begin{aligned}E(xy)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)\,dxdy\\&=\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\,dy\\&=E(x)E(y)\end{aligned}$$

【附註】 上面獨立的假設對性質 7－6 是不可缺的，然而性質 7－4 必不需要。

【例題 7－12】 （摘自An Introduction to Probability Theory and Its Application 作者爲W. Feller. P. 225）假設爲了研究某種特性，我們得試驗一大群的人，每次所得的結果不是正就是負，又假設我們可以由幾個人中，抽取樣本，且將混合的樣本視爲一單位加以試驗，例如抽血檢驗常常如此。

【假定】 混合樣本爲負，若且唯若所有組成的樣本都爲負。如果混合樣本爲正，則所有的樣本必須個別接受試驗以決定那個是正的。又若 N 個人被分成 n 組，每組 k 個人，（即 $N=kn$），則有下列的選擇。

(a)個別試驗所有 N 個人，需要 N 次試驗。

(b)試驗每組，每組各有 k 個樣本，最少需要試驗 $n=N/k$ 次，最多要 $(k+1)n=N+n$ 次。

我們的目的是要研究在(b)情況下試驗的期望值數，然後與 N 比較。

【假定】 試驗結果爲正的機率是常數 p，且同一組的人試驗結果互不影響，設 x 爲由 N 人中決定特性所需試驗的次數，x_i 爲試驗第 i 組的人所需試驗的次數，$i=1, 2, \cdots\cdots n$。因此 $X=x_1+\cdots\cdots+x_n$，$E(x)=E(x_1)+\cdots+E(x_n)$

$$=nE(x_i)$$

所有 x_i 均具相同的期望值。又 x_1 不是爲 1 就是 $k+1$，僅有兩個值，所以

$P(x_1=1)=P$ （第 1 組的人都是爲負）

$P(x_1=k+1)=1-(1-p)^k$

故

$$\begin{aligned}E(x_1)&=1\cdot(1-p)^k+(k+1)[1-(1-p)^k]\\&=k[1-(1-p)^k+k^{-1}]\end{aligned}$$

$$E(x)=nE(x_1)=N[1-(1-p)^k+k^{-1}]$$

（上式只有當 $k>1$ 時才成立，因爲如果 $k=1$，則 $E(x)=N+pn$
那是顯然錯誤的）。

最後，爲了使„分組試驗”比„個別試驗”更爲適用必須是 $E(x)<N$，亦即 $1-(1-p)^k+k^{-1}<1$，此不等式卽 $k^{-1}<(1-p)^k$。若 $(1-p)<\frac{1}{2}$，則不能成立，因爲如果 $(1-p)<\frac{1}{2}$，則 $(1-p)^k<(\frac{1}{2})^k<1/k$，此式導源於 $2^k>k$，綜上所述，我們得到下列很有意思的結論：如果個別試驗結果爲正的機率 p 大於 $\frac{1}{2}$，則分組試驗是不太適合的！（見習題 7－11 b）

【例題 **7－13**】　我們利用上面的性質，再次求二項分配隨機變數的期望值，這樣方法可以應用到其他許多類似的情形。

考慮一個重覆 n 次的獨立試驗，令 x 表某事件 A 發生的次數，並設 $p=P(A)$，且對其他的重複試驗而言，$P(A)$ 是不變的常數。

定義輔助隨機變數 $Y_1\cdots\cdots Y_n$ 如下

$Y_i=1$，如果事件 A 在第 i 次重複試驗時發生，

$\quad=0$　其他情形

則　$X=Y_1+Y_2+\cdots\cdots\cdots+Y_n$

由性質 7－5，我們得到

$$E(X)=E(Y_1)+E(Y_2)+\cdots\cdots+E(Y_n)$$

然而

$$E(Y_i)=1(p)+0(1-p)=p \qquad \forall i$$

結果是 $E(x)=np$，此與前面的結果是一樣的

【附註】　我們重新解釋此重要結果。考慮隨機變數 x/n 這代表實驗 ε 在 n 次重復試驗中事件 A 的相對頻率（relative frequency），由性質 7－2，我們知道 $E(x/n)=(np)/n=p$，這是很直覺的，因爲事件 A 的相對頻率爲 p，$p=P(A)$。首先以理論證實了事件的相對頻率與事件的機率有關係的事實，在本章後面，我們將得到更進一步的結果，導出相對頻率與機率間更明確的關係。

【例題 **7－14**】　假設某一產品之每週需要量 D 是個隨機變數，其機率分配 $P(D=n)=p(n)$，$n=0,1,2\cdots\cdots$假設每件成本 C_1 元售價爲 C_2 元，如果到週末尙未售出，則每件儲藏費 C_3 元，假設廠商在每週開始時決定生產 N 件，問其每週的利潤期望值爲多少？又 N 爲何值利潤最大？若 T 是每週的利潤則

$$T=NC_2-NC_1 \qquad \text{若} D>N$$
$$=DC_2-C_1N-C_3(N-D) \qquad \text{若} D\le N$$

整理上式得

$$T=N(C_2-C_1) \qquad \text{若} D>N$$
$$=DC_2-C_1N-C_3(N-D) \qquad \text{若} D\le N$$

因此期望利潤為

$$E(T)=N(C_2-C_1)P(D>N)+(C_2+C_3)\sum_{n=0}^{N} np(n)$$

$$-N(C_1+C_3)P(D\le N)$$

$$=N(C_2-C_1)+(C_2+C_3)\left[\sum_{n=0}^{N} np(n)-N\sum_{n=0}^{N} p(n)\right]$$

$$=N(C_2-C_1)+(C_2+C_3)\sum_{n=0}^{N} p(n)(n-N)$$

設若已知D的分配是D：$P(D=n)=\frac{1}{5}$，$n=1,2,3,4,5$

則 $E(T)=N(C_2-C_1)+\frac{(C_2+C_3)}{5}[N(N+1)/2-N^2]$ 若$N\le 5$

$=N(C_2-C_1)+(C_2+C_3)\frac{1}{5}(15-5N)$ 若$N>5$

假設$C_2=\$9$，$C_1=\$3$ 和 $C_3=\$1$， 則

$E(T)=6N+2\left[\frac{N(N+1)}{2}-N^2\right]$ 若$N\le 5$

$=6N+2(15-5N)$ 若$N>5$

$=7N-N^2$ 若$N\le 5$

$=30-4N$ 若$N>5$

因此$N=3.5$時，有極大值（見圖7－5），但N是整數，故$N=3$或$N=4$時，有極大值$E(T)=12$

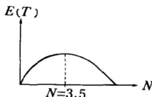


圖7－5

§7－5 隨機變數的變異數

(The Variance of a Random Variable)

假設有一隨機變數，其$E(x)=2$，這有何意義呢？它只告訴我們，如果我們考慮x的n個值x_1……x_n……然後將這些x的值平均，如果n很大的話，此平均值將近於2。假設x表示從廠商驗收到的燈泡的壽命長度，且$E(x)=1000$小時，此即表示可能大部份的燈泡壽命長度為900元1100小時之間。也有可能這些燈泡是全然不同的兩類，有一半的燈泡是高品質的，其壽命約1300小時，其餘的則為低品質的燈泡，壽命約700小時，所以我們不能對期望值相信的太多。

從上例，很顯然的，我們需要一種新的數量測度以區別上例的兩種不同情況，每種測量方法都具有獨特的意義，但下面的討論却是用的最普遍的。

【定義】 X是一隨機變數，我們定義X的變異數（Variance）$V(x)$或σx^2如下所示

$$V(x)=E[X-E(x)]^2 \qquad (7-12)$$

$V(x)$的正平方根值，（即其平方根，取正數）稱爲x的標準差（Standard deviation），而表爲σx

【附註】 (a)$V(x)$的單位爲x的平方單位，亦即若x的單位是小時，則$V(x)$的單位是（小時）^{2}，這是我們所以要討論標準差的一個理由，因爲標準差的單位和x的單位相同。

(b)其他可能的量度也許是$E|x-E(x)|$，但x^2比$|x|$要"表現良好"（better-behaved），因此變異數較標準差受人歡迎。

(c)如果我們解釋$E(x)$爲分配在實數軸上的單位質量的中心，則我們可以說$V(x)$是此質量對於通過質量中心之垂直軸的慣性矩（moment of inertia）。

(d)隨機變數x，對於期望値的第k級動差（kth moment）的定義爲$\mu_k=E[x-E(x)]^k$，當$k=2$時，顯然即是變異數，亦即（7－12）式乃此特例。

$V(x)$的計算可以藉下列結果而簡化：

【定理7－5】 $V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

【證明】

$$\begin{aligned} V(x) &= E[x-E(x)]^2 \\ &= E\{x^2-2xE(x)+[E(x)]^2\} \\ &= E(x^2)-2E(x)E(x)+[E(x)]^2 \quad E(x)\text{是常數} \\ &= E(x^2)-[E(x)]^2 \end{aligned}$$

【例題7－15】 氣象局以"雲層的厚度"（degrees of cloudiness）來區分天空的類型，其種類表示爲：0，1，2，3，……10，此處0代表晴朗的天氣，10代表烏雲密集的天氣，其他數值各依雲層濃厚而序列，又x是個隨機變數，有上面11個可能的數值，假設x的機率分配，在某一氣象台一天內的情形是如下所表示的

$$p_0=p_{10}=0.05$$
$$p_1=p_2=p_8=p_9=0.15$$
$$p_3=p_4=p_5=p_6=p_7=0.06$$

則

$$\begin{aligned} E(x) &= 1(0.15)+2(0.15)+3(0.06)+4(0.06) \\ &\quad +5(0.16)+6(0.06)+7(0.06)+8(0.15) \\ &\quad +9(0.15)+10(0.05)=5.0 \end{aligned}$$

爲了求$V(x)$之值，我們要先求$E(x^2)$之值

$$E(x^2)=1(0.15)+4(0.15)+9(0.06)+16(0.06)+25(0.06)+36(0.06)+49(0.06)+64(0.15)+81(0.15)+100(0.05)$$
$$=35.6$$

所以

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$
$$=35.6-25$$
$$=10.6$$

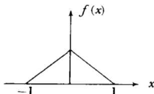


圖7－6

標準差$\sigma=3.25$

【例題7－16】 假設x是個連續隨機變數，其pdf f如下

$$f(x)=1+x \qquad -1\le x\le 0$$
$$=1-x \qquad 0\le x\le 1$$

見圖7－6，因爲pdf f的對稱性，所以$E(x)=0$ （見下面附註說明），而

$$E(x^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx$$
$$=1/6$$

【附註】 假設一連續隨機變數，其pdf f對稱於$x=0$，亦即$f(-x)=f(x)$，$\forall x$。又若$E(x)$存在，則$E(x)=0$；若pdf f對稱於$x=a$，則$E(x)=a$ （見習題7－33）

§7－6 變異數的性質

(Properties of the Variance of a Random Variable)

變異數有各種重要的性質，其中一部份類似於隨機變數的期望值的性質。

【性質7－7】 如果C是常數，則$V(x+c)=V(x)$ （7－13）

【證明】 $V(x+c)=E[(x+c)-E(x+c)]^2$

$$=E[(x+c)-E(x)-c]^2$$
$$=E[x-E(x)]^2=V(x)$$

【附註】 此性質是顯而易知的，因爲在x的結果上加個常數，並不會改變其大小，因此變異數就保持不變，它只是將x的值移向左或右而已！

【性質7－8】 如果c是常數，則

$$V(cx)=c^2V(x) \qquad (7-14)$$

【證明】 $V(cx)=E(cx)^2-[E(cx)]^2$

$$=c^2E(x^2)-c^2[E(x)]^2$$
$$=c^2[E(x^2)-[E(x)]^2]$$
$$=c^2V(x)$$

【性質7－9】　若（x，y）是二維隨機變數，且x和y是獨立的，則

$$V(x+y)=V(x)+V(y) \qquad (7-15)$$

【證明】

$$\begin{aligned} V(x+y) &= E(x+y)^2-[E(x+y)]^2 \\ &= E(x^2+2xy+y^2)-[E(x)]^2 \\ &\quad -2E(x)E(y)-[E(y)]^2 \\ &= E(x^2)-[E(x)]^2+E(y^2)-[E(y)]^2 \\ &= V(x)+V(y) \end{aligned}$$

【附註】　通常變異數並不具有加法律，性質7－9要在獨立的假設下才能成立。又變異數也不具有線性性質，亦即$V(ax+b)\neq aV(x)+b$，却是$V(ax+b)=a^2V(x)$

【性質7－10】　令x_1，……，x_n是n個獨立隨機變數，則

$$V(x_1+\cdots\cdots+x_n)=V(x_1)+\cdots\cdots+V(x_n) \qquad (7-16)$$

【證明】　利用性質7－9和數學歸納法。

【性質7－11】　令x是個隨機變數，其變異數的大小是有限的，且對任意實數α。

$$V(x)=E[(x-\alpha)^2]-[E(x)-\alpha]^2 \qquad (7-17)$$

【證明】　見習題7－36。

【附註】　(a)本性質顯然是定理7－5的推廣，因為令$\alpha=0$，我們即得定理7－5。

(b)如果我們將$V(x)$解釋為慣性矩（moment of inertia）而$E(x)$為單位質量中心，則本性質就是力學上有名的平移定理（parallel-axis theorem）〔譯者按：比乃按部定名詞翻譯，亦有譯成平行軸定理者，如中國機械工程手冊。〕：對於任意一定點的慣性矩，等於對質量中心的慣性矩加上此任意定點到質量中心距離的平方。

(c)如果$\alpha=E(x)$則$E[x-\alpha]^2$為最小，此可立即由性質7－11看出。如此則對於通過定點的一定軸的慣性矩為最小值，當此定點為質量中心時。

【例題7－17】　我們要計算參數為p的二項分配隨機變數的變異數。

我們可有兩種方法：我們已知$E(x)=np$，我們只要計算$E(x^2)$，則$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$。要計算$E(x^2)$，我們利用

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots\cdots n,$$

因此

$$E(x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

由此我們很容易算出。但我們有更簡單的方法：

我們將X表為$X=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n$，如同例7－13，又$Y_i$是獨立的

隨機變數，由性質 7 － 10，我們得到

$$V(X)=V(Y_1+\cdots\cdots+Y_n)=V(Y_1)+\cdots\cdots+V(Y_n)$$

但是 $V(Y_i)=E(Y_i)^2-[E(Y_i)]^2$

現在

$$E(Y_i)=1\cdot(p)+0(1-p)=p$$
$$E(Y_i)^2=1^2\cdot(p)+0^2(1-p)=p$$

所以

$$V(Y_i)=p-p^2=p(1-p)\quad Vi$$

故 $V(X)=np(1-p)$

【附註】 我們將 $V(x)$ 視爲 p 的函數，$V(x)=np(1-p)$ 對於一定的 n，我們繪出其圖形，如圖 7 － 7 所示

解：$(d/dp)np(1-p)=0$，

我們發現 $p=\frac{1}{2}$ 時，$V(x)$ 值爲最大；$p=0$ 和 $p=1$ 時 $V(x)$ 顯然最小

直覺上它應是如此的，回想一下，如果 X 定義爲 n 次重複試驗當中，事件 A 發生的次數。我們定義變異數，以測量 X 的變動大小。我們發現如果 $p=0$ 或 $p=1$ 時，就毫無變動，亦即 A 發生的機率不是 0 即爲 1。而當我們最不確定時，即 $P(A)=\frac{1}{2}$ 時，變動就最大了。

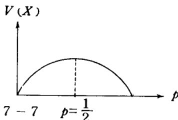


圖 7 － 7

【例題 7 － 18】 假若隨機變數 X 均勻分配在 $[a,b]$ 上，如以前我們所算 $E(x)=(a+b)/2$，我們先求 $E(x^2)$ 再求 $V(x)$

$$E(x^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

經由簡單的計算

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

【附註】 (a)這結果是顯而易知的，同時也知道 X 的變異數並不決定於 a 或 b 端點，而決定於 $(b-a)^2$，即 b 和 a 的差之平方值。因此兩個均勻分配在某區間（不一定要相同）的隨機變數，只要區間的長度相等，則其變異數也將相同。

(b)我們很容易知道，一根質量爲 M，長爲 L 的細長直棒對於通過中心的橫軸（transverse axis）的慣性矩爲 $ML^2/12$。

§7－7 期望值和變異數的近示表示

(Approximate Expressions for Expectation and Variance)

我們已知道要計算$E(Y)$或$V(Y)$的値時，此處$Y=H(X)$並不需要求Y的機率分配，而可以直接利用X的機率分配。同樣，如果$Z=H(X,Y)$，要求$E(Z)$和$V(Z)$時，也不必先求Z的機率分配。

如果函數H相當複雜，則上面期望值和變異數的計算，可能要用到很困難的積分（或求和），因此下面的估計是相當有用的。

【定理7－6】　令X爲隨機變數，其$E(X)=\mu$，$V(X)=\sigma^2$，設$Y=H(X)$，則

$$E(Y)\cong H(\mu)+\frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2 \qquad (7-18)$$

$$V(Y)\cong [H'(\mu)]^2\sigma^2 \qquad (7-19)$$

（爲了使上面的近似值有意義，H至少在$X=\mu$必須是二階可微分）

【證明】　爲了得到7－18式，我們將H對$X=\mu$展爲泰勒級數

於是
$$Y=H(\mu)+(X-\mu)H'(\mu)+\frac{(x-\mu)^2H''(\mu)}{2}+R_1$$

此處R_1爲餘式

若我們不考慮餘式R_1，兩邊取期望值，則

$$E(Y)\cong H(\mu)+\frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2$$

因爲$E(X-\mu)=0$

爲了要得到（7－19）式，我們將H對$X=\mu$展開泰勒級數

則　$Y=H(\mu)+(X-\mu)H'(\mu)+R_2$

我們不考慮R_2，兩邊取變異數，則

$$V(Y)\cong [H'(\mu)]^2\sigma^2$$

【例題7－19】　在某種情況下，某液體之表面張力的公式是$S=2(1-0.005T)^{1.2}$（dyn/cm），此處T（°C）是液體的溫度。

假設T是個連續隨機變數，其pdf爲

$$f(t)=3000t^{-4} \qquad t\geq 10$$
$$=0 \qquad \text{其他情形}$$

因此
$$E(T)=\int_{10}^{\infty}3000t^{-3}dt=15°C$$

且

$$V(T)=E(T^2)-(15)^2$$
$$=\int_{10}^{\infty}3000t^{-2}dt-225=75°(C)^2$$

要計算$E(s)$和$V(s)$的值，我們得先求下列積分值

$$\int_{10}^{\infty}(1-0.005t)^{1.2}t^{-4}dt$$

及

$$\int_{10}^{\infty} (1-0.005)^{2.4} \; t^{-4} \, dt$$

由（7－18）和（7－19）分別求$E(s)$和$V(s)$的近似値，爲了利用此兩公式，得先求出$H'(15)$和$H''(15)$

此處 $H(t)=2(1-0.005t)^{1.2}$

因此

$$H'(t)=2.4(1-0.005t)^{0.2}(-0.005)$$
$$=-0.012(1-0.005t)^{0.2}$$

所以 $H(15)=1.82 \qquad H'(15)=0.01$

同樣的

$$H''(t)=-0.0024(1-0.005t)^{-0.8}(-0.005)$$
$$=0.000012(1-0.005t)^{-0.8}$$

故

$$H''(15)=\frac{0.000012}{(0.925)^{0.8}}=0'$$

於是我們得到

$$E(s)\cong H(15)+75H''(15)=1.82\ (dyne/cm)$$
$$V(s)\cong 75\,[H'(15)]^2=0.87\ (dyne/cm)^2$$

如果$Z=H(x,y)$，也有類似的結果。

【定理 7－7】 (x,y)是個二維隨機變數，$E(x)=\mu_x$，$E(y)=\mu_y$；$V(x)=\sigma_x^2$，$V(y)=\sigma_y^2$。令$Z=H(x,y)$

〔我們假定H的各種導數在(μ_x,μ_y)點存在〕

則若x和y爲獨立，我們得到

$$E(Z)\simeq H(\mu_x,\mu_y)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sigma_x^2+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\sigma_y^2\right]$$

$$V(Z)\simeq\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^2\sigma_x^2+\left[\frac{\partial H}{\partial y}\right]^2\sigma_y^2$$

此處所有偏導數都是對點(μ_x,μ_y)而言

【證明】 先對點(μ_x,μ_y)將H分別展開成為一項和二項的泰勒級數，不考慮餘式，如同定理 7－6，兩邊取期望值和變異數，其餘細節留給讀者自行演算。（如果x和y不爲獨立，則公式就要比較複雜了。）

【附註】 上面的定理可以推廣到n個獨立隨機變數的函數，例如$Z=H(x_1,\cdots\cdots x_n)$，若$E(x_i)=\mu_i$，$V(x_i)=\sigma_i^2$，且所有的導數存在，則有下列的近似值存在

$$E(Z)\cong H(\mu_1,\cdots\cdots,\mu_n)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}\sigma_i^2$$

$$V(Z)\cong\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial H}{\partial x_i})^2\sigma_i^2$$

所有的偏微分都是對點（$\mu_1,\cdots\cdots,\mu_n$）而言

【例7 7－20】 假設有一簡單電路，其電壓M可以歐姆定律（Ohm's Law）表為$M=IR$，此處I和R分別是電路的電流和電阻，如果I和R為獨立隨機變數，則M亦為隨機變數，由定理7－7，我們可以得到

$$E(M)\cong E(I)E(R)$$

$$V(M)\cong[E(R)]^2V(I)+[E(I)]^2V(R)$$

§7－8　闕比雪夫不等式　(Chebyshev's Inequality)

我們有個很有名的闕比雪夫不等式，是由蘇俄數學家闕比雪夫所提出，它在以後的章節裏是很重要的。另外，它也告訴我們如何更清楚知道變異數對不同的隨機變數期望值的變動量的測量。

如果我們知道隨機變數x的機率分配，我們就可以求$E(x)$和$V(x)$之値，但相反未必可以。也就是說，若只知道$E(x)$和$V(x)$，並不能求出x的機率分配，故不能計算如$P[|x-E(x)|\leq C]$之値。雖然我們不能求此類的機率，可是由$E(x)$和$V(x)$，我們却可以知道此類機率的上限或下限値（upper or lower bound），此即闕比雪夫不等式要告訴我們的。

闕比雪夫不等式（Chebyshev's Inequality）

設隨機變數x期望値$E(x)=\mu$；C為任意實數，若$E(x-C)^2$為有限大的値，ε是任意正數，則

$$P[|x-C|\geqq\varepsilon]\leq\frac{1}{\varepsilon^2}E(x-C)^2 \qquad (7-20)$$

下列幾種形式，和（7－20）式是對等的：

(a)若考慮餘事件（Complementary event），則

$$P[|x-C|<\varepsilon]\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}E(x-C)^2 \qquad (7-20a)$$

(b)若$C=\mu$，則

$$P[|x-\mu|\geq\varepsilon]\leq\frac{Var X}{\varepsilon^2} \qquad (7-20b)$$

(c)若$C=\mu$，且$\varepsilon=k\sigma$，其中$\sigma^2=Var X>0$，則

$$P[|x-\mu|\geq k\sigma]\leq k^{-2} \qquad (7-21)$$

（7－21）式，特別指出在$E(x)=\mu$附近，變異數是如何測量機率的集中程度（degree of concentration）。

【證明】 我們只證明（7－20）式，其餘式子可由提示自行證得，且我們僅討論連續的情形。離散的情形，類似於連續時，只要將積分改為求和即可證得，但要注意區間的端點。

考慮下面這個式子

$$P\left[\,|x-C|\geq\varepsilon\,\right]=\int_{x:\,|x-c|\geq\varepsilon}f(x)\,dx$$

（此積分的上下限表示，我們是在 $-\infty$ 與 $C-\varepsilon$ 及 $C+\varepsilon$ 與 $+\infty$ 之間積分）

現在 $|x-c|\geq\varepsilon$ 是相當於 $(x-c)^2/\varepsilon^2\geq1$，故上式的積為

$$\leq\int_R\frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2}f(x)\,dx$$

此處 $R=\{x:|x-c|\geq\varepsilon\}$，故此積分變為

$$\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E\left[x-c\right]^2$$

【附註】 (a)上面的結論是很精確的，因為我們對隨機變數 x 的機率行為的假設很少。

(b)正如我們可能懷疑的一樣，隨機變數 x 的機率分配情形將使我們更準確寫出不等式，例如：若 $c=3/2$，由關比雪夫不等式，則

$$P\left[\,|x-\mu|\geq\frac{3}{2}\sigma\,\right]\leq\frac{4}{9}=0.44$$

假設我們又知道 x 是均勻分配在 $(1-1/\sqrt{3},\ 1+1/\sqrt{3})$ 上，故 $E(x)=1$，$V(x)=\frac{1}{9}$，且

$$P\left[\,|x-\mu|\geq\frac{3}{2}\sigma\,\right]=P\left[\,|x-1|\geq\frac{1}{2}\,\right]$$

$$=1-P\left[\,|x-1|<\frac{1}{2}\,\right]$$

$$=1-P\left[\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right]$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0.134$$

雖然由關比雪夫不等式所得到的敘述，與此結果無異，但是後者敘述的更詳盡，然而在多數的問題中沒有關於隨機變數特定分配的假設。在這些情況下，關比雪夫不等式能提供我們隨機變數的情況的重要資料。

由（7－21）式，我們知道若 $V(x)$ 很小，則大部分的 x 的機率分配集中中在 $E(x)$ 附近，下面的定理將有更進一步的敘述。

【定理7－8】　若$V(x)=0$，則$P[x=\mu]=1$，其中$\mu=E(x)$

【證明】　從（7－20b）式中，我們知道

$P[|x-\mu|\geq\varepsilon]=0 \quad \forall\varepsilon>0$

故　$P[|x-\mu|<\varepsilon]=1 \quad \forall\varepsilon>0$

因爲ε可以任意小，此定理得證

【附註】　(a)此定理告訴我們，若變異數爲0，則所有的機率都集中在一點$E(x)$。

(b)若$E(x)=0$，則$V(x)=E(x^2)$，所以此例中$E(x^2)=0$可以引出相同結論。

(c)上面的意思是說x是個退化的隨機變數，亦即它只有一個值，其機率爲1。

§7－9　相關係數　(The Correlation Coefficient)

（The Correlation Coefficient）

到目前爲止，我們所討論的是將一些參數，如$E(x)$和$V(x)$與一維隨機變數的分配扯上關係。就先前所討論的，這些參數可測量分配的某些特性。如果我們有個二隨機變數(x, y)，也將會出現類似的問題。當然，我們可以再討論與(x, y)有關的隨機變數x和y。但是，是否存在一個有意義的參數以測量x和y間的聯結程度（degree of association），這些不淸楚的觀念，將很快被澄淸，我們敍述下列正式定義。

【定義】　(x, y)爲二維隨機變數，我們定義x和y之間的相關係數（the correlation coefficient）爲ρ_{xy}

$$\rho_{xy}=\frac{E\{[x-E(x)][y-E(y)]\}}{\sqrt{V(x)V(y)}} \qquad (7-22)$$

【附註】

(a)假定所有的期望值均存在，且$V(x)$和$V(y)$不爲0，如果我們知道所要討論隨機變數的對象，則通常只寫ρ而不寫ρ_{xy}

(b)（7－22）式的分子，即$E\{[x-E(x)][y-E(y)]\}$稱爲x和y之間的協變數（Covariance），有時記爲σ_{xy}。

(c)相關係數是設有因次的量。

(d)要上述定義成爲很有用之前，必先知道ρ所測量的對象，我將考慮ρ的一些性質。

【定理7－9】

$$\rho=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

【證明】　考慮

$$E\{[x-E(x)][y-E(y)]\}=E[xy-xE(y)-yE(x)+E(x)E(y)]$$
$$=E(xy)-E(x)E(y)-E(y)E(x)+E(x)E(y)$$
$$=E(xy)-E(x)E(y)$$

【定理**7－10**】 若x和y是獨立的，則$\rho=0$

【證明】 這是由定理7－9直接產生的，若x和y爲獨立

則 $E(xy)=E(x)E(y)$

【附註】 (a)定理7－10的逆敘述通常是不成立的。(見習題7－39)亦即可能$\rho=0$，但x和y並不一定爲獨立。如果$\rho=0$，我們稱x和y爲不相關(uncorrelated)。因此，通常不相關和獨立並不對等，下面的例子，說明了這事實。

令x和y爲有相同分配的隨機變數，又$U=x-y$，$V=x+y$，故$E(U)=0$，且$cov(U,V)=E[(x-y)(x+y)]=E(x^2-y^2)=0$因此$U$和$V$是不相關的。即使$x$和$y$爲獨立，$U$和$V$也可能爲不獨立(或是相依)的，試再看下列：設$x$和$y$分別是出現在第一和第二枚骰子的點數，假如我們發現$P[V=4\mid U=3]=0$(因爲若$x-y=3$，則$x+y$不可能爲4)而$P(V=4)=3/36$，因此$U$和$V$是不獨立(或相依)的。

【定理**7－11**】 $-1\leq\rho\leq1$(亦即，假設ρ值是在-1和$+1$之間的)。

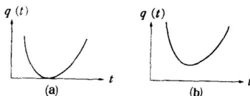


圖7－8

【證明】 考慮下面實數t的函數

$$q(t)=E[V+tW]^2$$

其中$V=x-E(x)$，$W=Y-E(y)$，因爲$[V+tW]^2\geq0$

則$q(t)\geq0$ t 同時加以展開，我們得到

$$q(t)=E[V^2+2tVW+t^2W^2]$$
$$=E(V^2)+2tE(VW)+t^2E(W^2)$$

因此$q(t)$是t的二次多項式，通常一個二次式$q(t)=at^2+bt+c$，如果對每一個t而言，都有$q(t)\geq0$，即其函數圖形只與t軸交於一點，甚至根本不相交，如圖7－8所示，亦即$b^2-4ac\leq0$。$q(t)$有二不同實根，將此結果應用在$q(t)$上，我們得到

$$4[E(VW)]^2-4E(V^2)E(W^2)\leq 0$$

所以

$$\frac{[E(VW)]^2}{E(V^2)E(W^2)}\leq 1\ ,$$

因而 $\dfrac{\{E[x-E(x)][y-E(y)]\}^2}{V(x)V(y)}=\rho^2\leq 1$

故　$-1\leq\rho\leq 1$

【定理**7－12**】　假設$\rho^2=1$，則$Y=AX+B$，其中A和B爲常數，亦即如果相關係數$\rho=\pm 1$，則Y是X的線性函數。

【證明】　再考慮定理7－11證明中的$q(t)$由其證明我們很容易看出若$q(t)>0$，$\forall t$，則$\rho^2<1$，所以本定理中的假設，即$\rho^2=1$，告訴我們至少有一t值，如t_o，可使$q(t_o)=E(V+t_oW)^2=0$，因爲$V+t_oW=[X-E(x)]+t_o[Y-E(y)]$所以$E(V+t_oW)=0$，而$(V+t_oW)$的變異數爲$E(V+t_oW)^2$如此我們發現定理7－12的假設，使我們得知$V+t_oW$的變異數爲0。也因而我們由定理7－8可以下結論說：隨機變數$(V+t_oW)=0$（其機率爲1），故$[X-E(x)]+t_o[Y-E(y)]=0$重新整理一下，我們得到$Y=AX+B$（其機率爲1）。

【附註】　定理7－12的逆定理也是成立的

【定理**7－13**】　假設X和Y爲兩個隨機變數且$Y=AX+B$，此處A，B均爲常數則$\rho^2=1$若$A>0$則$\rho=1$；若$A<0$，則$\rho=-1$。

【證明】　因爲$Y=AX+B$，所以$E(Y)=AE(X)+B$，且$V(Y)=A^2V(X)$

同時　$E(XY)=E[X(AX+B)]=AE(X^2)+BE(X)$

因此

$$\begin{aligned}\rho^2&=\frac{[E(XY)-E(X)E(Y)]^2}{V(X)V(Y)}\\&=\frac{\{AE(X^2)+BE(X)-E(X)[AE(X)+B]^2\}^2}{V(X)A^2V(X)}\\&=\frac{[AE(X^2)+BE(X)-A(E(X))^2-BE(X)]^2}{A^2[V(X)]^2}\\&=\frac{A^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}^2}{A^2[V(X)]^2}=1\end{aligned}$$

〔本定理第二部份由$\sqrt{A^2}=|A|$此事實得到〕

【附註】　定理7－12和定理7－13告訴我們下列有關相關係數的重要特性，相關係數（corrlation coefficient）是測量x和y之間的線性程度。如果ρ之值接近1或－1，表示線性程度很高，如果接近0則表示缺乏此種線性關係，ρ值若爲正表示y隨x增加而增加。ρ值若爲負表示y隨x增加而減少。對於

相關係數有很多的誤解是要注意的，如 ρ 之值趨近於 0 ，只表示 x 和 y 之間不呈線線性關係，並不表示沒有任何其他非線性關係的可能。

【例題 7－21】 假設二維隨變（x，y）均勻分配在三角形區域 $R=\{(x,y)\mid 0<x<y<1\}$ 之上（見圖 7－9）

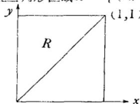


圖 7－9

因此其 pdf 為

$$f(x,y)=2 \qquad (x,y)\in R$$
$$=0 \qquad \text{其他情形}$$

於是 x 和 y 的邊際機率分配分別是

$$g(x)=\int_x^1 (2)\,dy=2(1-x) \qquad 0\le x\le 1$$

$$h(y)=\int_0^y (2)\,dx=2y \qquad 0\le y\le 1$$

因而

$$E(x)=\int_0^1 x\,2(1-x)\,dx=\frac{1}{3} \qquad E(y)=\int_0^1 y\,2y\,dy=\frac{2}{3}$$

$$E(x^2)=\int_0^1 x^2\,2(1-x)\,dx=\frac{1}{6} \qquad E(y^2)=\int_0^1 y^2\,2y\,dy=\frac{1}{2}$$

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{1}{18} \qquad V(y)=E(y^2)-[E(y)]^2=\frac{1}{18}$$

$$E(xy)=\int_0^1\int_0^y xy\,2\,dx\,dy=\frac{1}{4}$$

因此

$$\rho=\frac{E(xy)-E(x)E(y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}=\frac{1}{2}$$

我們已經提過，相關係數是個無維量（dimensionless quantity）其數值不因單位尺度的改變而改變，下面的定理可以很容易證得（見習題 7 － 41）

【定理 7－14】 如果 ρ_{xy} 是 X 和 Y 之間的相關係數，若 $V=AX+B$，$W=CY+D$，此處 A，B，C 及 D 為常數，則

$$\rho_{VW}=\frac{AC}{|AC|}\rho_{xy} \qquad (\text{假設 } A\ne 0,\ C\ne 0)$$

§ 7－10 條件期望值 (Conditional Expectation)

我們以前定義隨機變數 X 的期望值（以其機率密度表示）為

$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$，我們也可以定義其條件期望值，（

以其條件機率密度表示）

【定義】　(a)（x，y）是二維連續隨機變數，已知$Y=y$，我們定義x的條件期望值（conditionary expectation）為

$$E(x \mid y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x \mid y)\, dx \qquad (7-23)$$

(b)如果（x，y）是二維離散隨機變數，已知$Y=y_i$，我們定義X的條件期望值為

$$E(x \mid y_i)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i \mid y_j) \qquad (7-24)$$

同樣的，也可以定義已知x值，而求出y的條件期望值。

【附註】　(a)條件期望值的解釋如下：因為$g(x \mid y)$代表已知$Y=y$的情況下，X的條件機率密度分配（conditional pdf）因此$E(X \mid y)$是事件$\{Y=y\}$為已知時的X的期望值，例如若（X，Y）代表一鋼樣品的抗拉強度（tensile strength）和硬度（hardness），則$E(X \mid y=52.7)$是由硬度52.7（以Rockwell 硬度值表示）的鋼樣品中抽得的樣本的抗拉強度的期望值。

(b)$E(X \mid y)$是y的函數，所以是個隨機變數，這是要加以注意的。同樣$E(Y \mid x)$是x的函數，故也是一隨機變數。（嚴格說來$E(X \mid y)$是隨機變數$E(X \mid Y)$的值。

(c)因為$E(Y \mid X)$和$E(X \mid Y)$為隨機變數，故討論其期望值是很有意義的。我們可以考慮$E[E(X \mid Y)]$，要注意較內的期望值是對已知$Y=y$的X的條件分配而取的，較外的期望值是對Y的機率分配而取的。

【定理7－15】

$$E[E(X \mid Y)]=E(X) \qquad (7-25)$$

$$E[E(Y \mid X)]=E(Y) \qquad (7-26)$$

【證明】（只考慮連續情況）

由定義

$$E(X \mid y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, g(x \mid y)\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{f(x,y)}{h(y)}\, dx$$

此處（X，Y）的聯合機率密度函數（joint pdf）和h是Y的邊際機率密度函數（marginal pdf）

因此

$$E[E(X\mid Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}E(X\mid y)h(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f(x,y)}{h(y)}dx\right]h(y)dy$$

如果所有的期望值存在，則上式可改寫為

$$E[E(X\mid Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx=E(x)$$

〔（7－26）式的證明與上面的證明類似〕，本定理的證明是很有用的，如下面的例子所示。

【例題7－22】 假設每天送到的貨物件數不同，若N表貨物物品件數。隨機變數N的機率分配如下

n :	10	11	12	13	14	15
$P(N=n)$:	0.05	0.10	0.10	0.20	0.35	0.20

假定每一件物品損壞的機率都是0.10，如果X是每天送到的損壞物品件數，則X的期望值為何？若$N=n$，則X為二項式分配，因為N本身就是個隨機變數，我們討論如下：

我們知道$E(X)=E[E(X\mid N)]$，然而$E(X\mid N)=0.10N$，因為對已知N的情況下，X有二項式分配，因此

$$\begin{aligned}E(X)&=E(0.10N)=0.10E(N)\\&=0.10[10(0.05)+11(0.10)+12(0.10)+13(0.20)+14(0.35)+15(0.20)]\\&=1.33\end{aligned}$$

【定理7－16】 假設X和Y是獨立隨機變數

$E(X\mid Y)=E(X)$　　　　$E(Y\mid X)=E(Y)$

【證明】 見習題7－43

【例題7－23】 假設在某時間內供應給一水力發電公司的電力是一隨機變數X，假定X均勻分配在〔10，30〕上，又電力的需求Y也是一個隨機變數，Y均勻分配在〔10，20〕上。（依此，平均而言，電力的供應比需求要多，因為$E(X)=20$，而$E(Y)=15$），對於供應的電力每瓦賺＄0.03，如果需求超過供應，公司得向他處取得電力，每瓦賺＄0.01，求此公司的期望利潤為何？

令T為利潤，則

$$\begin{aligned}T&=0.03Y && 若Y<X\\&=0.03X+0.01(Y-X), && 若Y>X\end{aligned}$$

爲了計算$E(T)$我們將它寫成$E[E(T|X)]$，則

$$E(T|x)=\begin{cases}\int_{10}^{x}0.03\,y\frac{1}{10}dy\\ +\int_{x}^{20}(0.01\,y+0.02\,x)\frac{1}{10}dy & \text{若}10<x<20\\ \int_{10}^{20}0.03\,y\frac{1}{10}dy & \text{若}20<x<30\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{10}[0.015x^2-1.5+2+0.4x-0.005x^2\\ \quad -0.02x^2] & \text{若}10<x<20\\ \frac{9}{20} & \text{若}20<x<30\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0.05+0.04x-0.001x^2 & \text{若}10<x<20\\ 0.45 & \text{若}20<x<30\end{cases}$$

所以

$$E[E(T|X)]=\frac{1}{20}\int_{10}^{20}(0.05+0.04x-0.001x^2)dx$$
$$+\frac{1}{20}\int_{20}^{30}0.45\,dx$$
$$=\$0.43$$

§7－11　期望值的迴歸 (Regression of the Mean)

在上一節我們曾指出，$E(X|y)$是隨機變數$E(X|Y)$的值，且爲y的函數，此y的函數圖形稱爲X和Y上的期望值的迴歸曲線(regression curue)。同理，$E(Y|x)$是x的函數，其圖形稱爲Y在X上的期望值的迴歸曲線。對於每一已知的y值，$E(X|y)$是機率分配如(6－5)式或(6－7)式所定義的隨機變數的期望值，(見圖7－10)通常此期望值決定於y。〔對於$E(Y|x)$也有類似的解釋〕

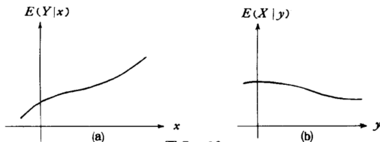


圖7－10

【例題7－24】 假設（X，Y）均勻分配在半圓上，如圖7－11所示則 $f(x,y)=2/\pi$，$(x,y)\in$半圓 因此

$$g(x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \qquad -1\le x\le 1$$

$$h(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}dx=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad 0\le y\le 1$$

因此

$$g(x\mid y)=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \qquad -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}$$

$$h(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 0\le y\le\sqrt{1-x^2}$$

所以

$$E(Y\mid x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,h(y\mid x)\,dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

同樣地

$$E(X\mid y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,g(x\mid y)\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\frac{x^2}{2}\Big]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=0$$

很可能其中一條或兩條迴歸曲線都是直線（見圖7－12）亦即$E(Y\mid x)$可能是x的線性函數且／或$E(X\mid y)$是y的線性函數，如果$E(X\mid y)$是直線，則我們稱X和Y上的期望值的迴歸是線性的。

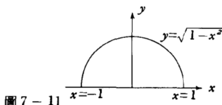


圖7－11

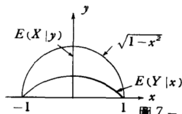


圖7－12

【例題7－25】 假設（x,y）均勻分配在如圖7－13所示的三角形上，則 $f(x,y)=1$，$(x,y)\in T$，下列對於邊際和條件機率密度函數的公式，很容易可以證得

$$g(x)=2x,\quad 0\le x\le 1,\quad h(y)=\frac{2-y}{2},\quad 0\le y\le 2$$

$$g(x\mid y)=\frac{2}{2-y}\qquad y/2\le x\le 1$$

$$h(y\mid x)=\frac{1}{2x}\qquad 0\le y\le 2x$$

於是

$$E(Y\mid x)=\int_{0}^{2x} y\,h(y\mid x)\,dy=\int_{0}^{2x} y\left(\frac{1}{2x}\right)dy=x$$

同理

$$E(X\mid y)=\int_{\frac{y}{2}}^{1} x\,g(x\mid y)\,dx=\int_{\frac{y}{2}}^{1} x\,\frac{2}{2-y}\,dx=\frac{y}{4}+\frac{1}{2}$$

如圖7－14所示，Y 在 X 上，或是 X 在 Y 上，其迴歸曲線都是呈直線

如果 Y 在 X 上的期望值的迴歸為線性，即 $E(Y\mid x)=\alpha x+\beta$，則我們可利用（$X,Y$）的聯合機率密度函數（joint pdf）的參數表出 α 和 β，我們再繼續討論下面的定理。

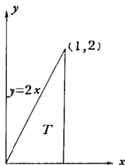


圖7－13

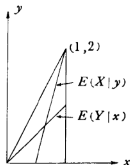


圖7－14

【定理7－17】 令（X,Y）為二維隨機變數，且設

$E(X)=\mu_x$，　$E(Y)=\mu_y$

$V(X)=\sigma_x^2$，　$V(Y)=\sigma_y^2$

設 ρ 是 X 和 Y 的相關係數，若 Y 在 X 上的迴歸曲線為線性，則

$$E(Y\mid x)=\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\qquad (7-27)$$

若X在Y上的迴歸曲線爲線性，則

$$E(X \mid y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y) \qquad (7-28)$$

【證明】 見習題7－44

【附註】 (a)如上所述，很可能一條迴歸曲線爲直線性，而另外一條却不是。

(b)注意相關係數在上面式子中所扮演的角色，如果X在Y上的迴歸曲線爲線性，且若$\rho = 0$，則我們發現$E(X \mid y)$與y無關，同時ρ的代數數字決定迴歸曲線的斜率。

(c)如果兩條迴歸曲線都是線性，同時解（7－27）和（7－28）兩式，則其交點爲（μ_x，μ_y），亦即交在分配的中心。

如例題7－23所示，迴歸函數並不一定是線性的，然而我們仍願意試著以線性函數去估計迴歸曲線，其方法通常是用最小平方法（principle of least squares），亦即：選較常數a和b使得$E[E(Y \mid X)-(aX+b)]^2$爲最小，同樣選取常數c和d，使得$E[E(X \mid Y)-(cY+d)]^2$爲最小。

直線$y = ax + b$和$y = cy + d$分別稱爲$E(Y \mid x)$和$E(X \mid y)$的最小平方近似值（least-squares approximations）。

【定理7－18】 如果$y = ax + b$是$E(Y \mid x)$的最小平方值，且若$E(Y \mid x)$是x的線性函數，亦即

$$E(Y \mid x) = a'x + b'$$

則 $a = a'$ 且 $b = b'$

【證明】 見習題7－45



7－1 試求下列隨機變數的期望值。

(a)習題4－1的隨機變數X。

(b)習題4－2的隨機變數X。

(c)習題4－6的隨機變數T。

(d)習題4－18的隨機變數T。

7－2 證明習題4－25之隨機變數X的期望值$E(X)$不存在。

7－3 下列代表D的機率分配，D是某一產品的每天需要量

d:	1, 2, 3, 4, 5
$P(D=d)$	0.1, 0.1, 0.3, 0.3, 0.2

試求$E(D)$之值

7－4 提煉石油時，蒸餾溫度T℃決定最後產品的品質，假設T是隨機變數，均勻分佈在（150，300）。

如果製造 1 加侖石油的成本爲 C_1 元。且若原油蒸餾的溫度低於 $200°C$，則一加侖賣 C_2 元，若蒸餾溫度高於 $200°C$，則一加侖賣 C_3 元，試求每加侖的期望利潤。

7－5　某合金是由兩種融熔金屬混合而成，此合金含有 x %的鉛，x 可視爲隨機變數，假設 x 的機率密度函數 pdf 爲

$$f(x)=\frac{3}{5}10^{-5}x(100-x) \qquad 0\le x\le 100$$

假設此合金的淨利潤，每磅爲　$P=C_1+C_2x$

試求 $E(P)$

7－6　假設一電子裝置的壽命爲 X（單位爲1000小時），可視爲連續變數，其 pdf 爲　$f(x)=e^{-x}$，$x>0$

若每件電子裝置的成本是 \$ 2.00，廠商每件賣價 \$ 5.00 但若 $x\le 0.9$，則保證退款，問每件裝置的期望利潤爲何？

7－7　實驗的前 5 次重複，每次花費 \$ 10，以後的重複每次 \$ 5，假設實驗每次重複直到結果出現，如果每次重複成功的機率爲 0.9，且每次重複互不影響，求整個實驗的費用的期望值。

7－8　一堆貨物含 2 件不良品，8 件良品，如果此堆貨，分別一件一件檢驗，求爲去除所有的不良品，所需要的檢查次數的期望值爲何？

7－9　10 個馬達不是全部售完，就是被完全退回，端賴下列的情況而定：隨機選取兩個馬達，加以檢查。如果有一個或是一個以上是不良品，則全數退回；否則全數購買。假設每個馬達成本 \$ 75，售價 \$ 100。如果有 10 個馬達，而其中一個是不良品，求廠商的期望利潤。

7－10　假設對某產品的每天需求量 D 是個隨機變數，其機率分配爲

$$P(D=d)=C\,2^d/d! \qquad d=1,2,3,4$$

(a)試求常數值 C。

(b)試求期望需求量。

(c)假設每件產品售價 \$ 5.00，有一廠商每天生產 k 件任何產品如果當晚沒有售出則必須拋棄，每件損失 \$ 3.00 (1)求每天利潤的機率分配，以 k 的函數型態表示。(2)欲使利潤爲最大，求每天應製造多少件最爲適合？

7－11　(a)如果 $N=50$，$P=0.3$，試定 k 值，使例 7－12 中的 $E(x)$ 爲最小。

(b)以(a)中的 N，P 值，k 值分別以 5，10，25，代入，比較對每一 k 值，是否〝分組試驗〞爲較好的。

7－12　假設 X 和 Y 是獨立隨機變數，其機率密度函數 pdf 爲

$$f(x)=8/x^3,\ x>2\ ;\ g(y)=2y \quad 0<y<1$$

(a)求 $Z=XY$ 的 pdf。

(b)分別用兩種方法求$E(Z)$，(1)利用(a)所求得的pdf，求$E(Z)$，(2)不用Z的pdf直接求$E(Z)$。

7－13　假設x的pdf

$$f(x)=8/x^3\ ,\ x>2$$

且$W=\frac{1}{3}x$

(a)利用W的pdf，求$E(W)$。

(b)不利用W的pdf，直接求$E(W)$。

7－14　一均勻骰子投擲72次，X爲6出現的次數，試求$E(x^2)$。

7－15　求習題5－2中，隨機變數Y和Z的期望值與變異數。

7－16　求習題5－3中，隨機變數Y的期望值與變異數。

7－17　求習題5－5中，隨機變數Y和Z的期望值與變異數。

7－18　求習題5－6中，隨機變數Y，Z和W的期望值與變異數。

7－19　求習題5－7中，隨機變數V和S的期望值與變異數。

7－20　求習題5－10中，每種情況下，隨機變數Y的期望值與變異數。

7－21　求習題6－7中，隨機變數A的期望值與變異數。

7－22　求習題6－11中，隨機變數H的期望值與變異數。

7－23　求習題6－13中，隨機變數W的期望值與變異數。

7－24　假設隨機變數X，其期望值$E(X)=10$，變異數$V(X)=25$，求a及b應爲何種正數值，才能使$Y=aX-b$的期望值爲0變異數爲1。

7－25　假設S爲任意電壓，其值在0至1伏特之間，且均勻分配在(0，1)上，又若S被另外獨立的任意雜音N干擾，N均勻分配在0至2伏特，亦即(0，2)之間

(a)對雜音N加以考慮，求S的期望電壓值。

(b)若被干擾的電壓S，接用2歐姆的電阻，求其期望的功率值。

7－26　假設X均勻分配在$[-a\ ,\ 3a]$上，求X的變異數。

7－27　一靶子是由三個中心圓構成，其半徑分別爲$1/\sqrt{3}$，1，及$\sqrt{3}$呎。打中最內圓爲4點，第二環爲3點，第三環爲2點，靶外爲0點，若若隨機變數R代表命中點與中心的距離，R的機率密度函數pdf爲$f(r)=2/\pi(1+r^2)$，$r>0$，試求射擊5次的期望點數值

7－28　假設連續隨機變數x的pdf爲$f(x)=2xe^{-x^2}$，$x\geq 0$又$Y=x^2$，用下列方法求$E(Y)$。

(a)不先求Y的pdf，直接求$E(Y)$。

(b)先求Y的pdf，再求$E(Y)$。

7－29　假設二維隨機變數(X,Y)均勻分配在圖7－15所示的三角形上，試求$V(X)$及$V(Y)$。

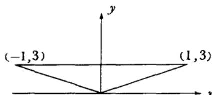


圖 7 − 15

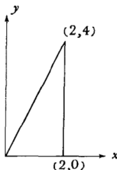


圖 7 − 16

7 − 30　假設（X，Y）均勻分配在圖 7 − 16 所示的三角形上
(a)分別求X和Y的邊際機率密度函數（marginal pdf）
(b)求$V(X)$及$V(Y)$。

7 − 31　X和Y為隨機變數，$E(X)=\mu_x$，$E(Y)=\mu_y$，$V(X)=\sigma_x^2$及$V(Y)=\sigma_y^2$，利用定理 7 − 7，求$E(Z)$和$V(Z)$的近似值，其中$Z=X/Y$。

7 − 32　假設X和Y是獨立隨機變數，都均勻分配在（1，2），$Z=X/Y$
(a)利用定理 7 − 7，求$E(Z)$和$V(Z)$的近似值。
(b)利用定理 6 − 5，求Z的pdf；然後求$E(Z)$和$V(Z)$的值，再與(a)比較。

7 − 33　如果X是個連續隨機變數，其pdf為f，f的圖形對稱於$x=a$，證明$E(x)=\alpha$，但假定$E(x)$存在，見例 7 − 16。

7 − 34　(a)假設隨機變數x其值是 1 和 − 1 的機率都是 1／2，若$P[|x-E(x)|\geq k\sqrt{V(x)}]$為$k$的函數，$k>0$，試繪其函數圖形，同時在同一座標系上；繪出Chebyshev's inequality（闕比雪夫不等式）所定的機率的上界。
(b)一切和(a)同，但$P(x=-1)=\dfrac{1}{3}$，$P(x=1)=\dfrac{2}{3}$。

7 − 35　若X均勻分配在（−1，3）上，試比較闕比雪夫不等式所得的機率$P[x-E(x)|\geq 2\sqrt{V(x)}]$的上界與眞確的機率。

7 − 36　證明 7 − 17 式。

7 − 37　假設二維隨機變數（X，Y）均勻分配在R上，其中R定義為$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1,\ y\leq 0\}$（見圖 7 − 17），試求相關係數$\rho_{xy}$。

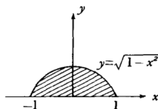


圖7－17

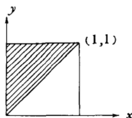


圖7－18

7－38 假設二維隨機變數（X，Y）之機率密度函數 pdf 為

$$f(x,y)=k\,e^{-y},\quad 0<x<y<1$$
$$=0,\quad 其他情形$$

7－39 下面的例子說明 $\rho=0$，並不能得意兩變數的獨立與否。假若（X，Y）的聯合機率分配如表7－1所示。

(a)證明 $E(XY)=E(X)E(Y)$，因而 $\rho=0$

(b)指出為何 X 和 Y 不為獨立。

(c)證明此例可以推廣為；選擇 1／8 的數目並不重要，重要的是所有圓圈內的值均相同，所有方格利的值也相同，且中心的值為0。

表7－1

Y \ X	-1	0	1
-1	(1/8)	[1/8]	(1/8)
0	[1/8]	0	[1/8]
1	(1/8)	[1/8]	(1/8)

7－40 假設 A 和 B 是和實驗 ε 有關的兩事件，$P(A)>0$，$p(B)>0$，令 X 和 Y 定義為。

$X=1$，當 A 發生；否則 $X=0$

$Y=1$，當 B 發生；否則 $Y=0$

證明 $\rho_{xy}=0$ 則 X 和 Y 是獨立的。

7－41 證明定理7－14。

7－42 考慮習題6－15中的隨機變數（X，Y），計算 $E(X\mid y)$，$E(Y\mid x)$，並驗證 $E(X)=E[E(X\mid Y)]$ 及 $E(Y)=E[E(E(Y\mid X)]$

7－43 證明定理7－16。

7－44 證明定理7－17。〔提示：在連續的情形下，則以 X 的 pdf，$g(x)$ 乘上 $E(Y\mid x)=Ax+B$，然後從$-\infty$積分到∞，同樣的方法，但以 $x\,g(x)$ 乘 $E(Y\mid x)$，由最後得到的方程式解 A 和 B 之值。

7－45 證明定理7－18。

7－46 若 X，Y 和 Z 是不相關的隨機變數，其標準差各為5，12，9，又若

$U = X + Y$ 及 $V = Y + Z$，試求 U 和 V 的相關係數。

7－47 假定平均數的回歸曲線都是線性的，且 $E(Y \mid x) = -\frac{3}{2}x - 2$，

及 $E(X \mid y) = -\frac{3}{5}y - 3$

(a)試求相關係數 ρ。

(b)求 $E(X)$ 及 $E(Y)$。

7－48 天氣預測未來 24 小時是"下雨"或"不下雨"，假設未來 24 小時下雨的機率 $\rho > \frac{1}{2}$，如果預測正確得 1 分，錯誤則 0 分。在 n 次預測中，預測者隨意選取 r 天（$0 \le r \le n$）說會下雨，其餘的 $n - r$ 天不會下雨，他的得分爲 S_n 試求 $E(S_n)$ 和 $V_{ar}(S_n)$，且求 r 值使 $E(S_n)$ 最大。（提示，設 $X_i = 1$ 或 0，端視於第 i 次預測之正確與否又 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，但其中 x_i 並不是獨立的變數）。



7－1

解：(a) X：正面出現的次數

則 X 呈二項分配

正面出現的概率 $P = \frac{3}{4}$

$\therefore E(X) = np = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

(b) X：The number of defective found

(1)取出後放回

$P(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}$

因 X 爲二項分配，每一物件爲不良品的概率 $P = \frac{1}{5}$

$\therefore E(X) = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

(2)取出後不放回

$$P(X=k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{20}{4-k}}{\binom{25}{4}}$$

則X為超幾何分配

$$\therefore E(X)=n\cdot p=4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

(c) $T=K+n\cdot\frac{K}{3}-C$

$T(0)=K-C$ $\qquad P(T_0)=0.8$

$T(1)=\frac{4}{3}K-C$ $\qquad P(T_1)=0.2\times0.8=0.16$

$T(2)=\frac{5}{3}K-C$ $\qquad P(T_2)=(0.2)^2\times0.8=0.032$

$T(3)=2K-C$ $\qquad P(T_3)=(0.2)^3\times0.8=0.0064$

$T(4)=\frac{7}{3}K-C$ $\qquad P(T_4)=(0.2)^4\times0.8=0.00128$

$$E(T)=(K-C)\times0.8+(\frac{4}{3}K-C)\times0.16+(\frac{5}{3}K-C)\times0.032+(2K-C)\times0.0064+(\frac{7}{3}K-C)\times0.00128$$

(d)令X表device的壽命長度

$f(x)=\frac{k}{x^n}$ $\qquad 2000\le x\le10,000$

$$n=2,\quad\int_{2000}^{10,000}\frac{k}{x^2}dx=-\frac{k}{x}\Big|_{2000}^{10,000}$$

$$=k\left(\frac{1}{2000}-\frac{1}{10,000}\right)$$

$$=k\times\frac{1}{2500}=1$$

$$\therefore k=2500$$

$$E(x)=\int_{2000}^{10\ 000}x\frac{2500}{x^2}dx=2500\ln x\Big|_{2000}^{10,000}$$

$$=2500\ln5$$

7－2

解： X表tube的壽命長度

$$f(x)=\frac{100}{x^2} \qquad x>100$$

若$E(x)$ exist then

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_{100}^{\infty} x\,\frac{100}{x^2}\,dx=100\,ln\,x\,\Big|_{100}^{\infty}=\infty$$

7－3

解： $E(D)=0.1\times1+0.1\times2+0.3\times3+0.3\times4+0.2\times5$

$=0.1+0.2+0.9+1.2+1$

$=3.4$

7－4

解： 因T均勻分配於（150，300）

$$\therefore f(t)=\frac{1}{150} \quad , \qquad 150<t<300$$

$$P(T\leq 200)=\frac{50}{150}=\frac{1}{3}$$

$$P(T>200)=\frac{2}{3}$$

令Y表淨獲利的隨機函數

$Y=C_2-C_1$ 　　若 $T<200$

$=C_3-C_1$ 　　若 $T>200$

$$f(x)=\frac{100}{x^2} \qquad x>100$$

若$E(x)$ exist then

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$=\int_{100}^{\infty} x\,\frac{100}{x^2}\,dx=100\,ln\,x\,\Big|_{100}^{\infty}=\infty$$

7－5

解： X：合金中所含鉛的百分率

$$f(x)=\frac{3}{5}10^{-5}\,x\,(100-x) \qquad 0\leq x\leq 100$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{100} x\frac{3}{5}10^{-5}x(100-x)\,dx$$

$$=\frac{3}{5}\times 10^{-5}\int_{0}^{100}(100x^2-x^3)\,dx$$

$$=\frac{3}{5}\times 10^{-5}\left[\frac{190}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{100}\right]$$

$$=\frac{3}{5}\times 10^{-5}\left[\frac{1}{3}\times 10^{8}-\frac{1}{4}\times 10^{8}\right]$$

$$=\frac{3}{5}\times 10^{-5}\times\frac{1}{12}\times 10^{8}$$

$$=50$$

淨獲益　$P=C_1+C_2x$

$$E(P)=C_1+C_2E(x)$$

$$=C_1+50C_2$$

7－6

解：　令Y為每一元件的獲利。

X為其 *life length*

$Y=5-2=3$　　　　若　$x>0.9$

$=-2$　　　　若　$x\leq 0.9$

又$P(X\leq 0.9)=\int_{0}^{0.9}e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_{0}^{0.9}$

$=1-e^{-0.9}=0.594$

$P(X>0.9)=e^{-0.9}=0.406$

$\therefore E(Y)=3\times p(x>0.9)+(-2)\times p(x\leq 0.9)$

$=3\times 0.406+(-2)\times 0.594=0.03$

7－7

解：　令X表重複操作的次數

Y表 *cost*

則$Y=10x$　　　　若　$x\leq 5$

$=50+5(x-5)$　　　　若　$x>5$

$P(x=k)=(0.1)^{k-1}\times 0.9$

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{5}10k\,p(x=k)+\sum_{k=6}^{5}(25+5k)\,p(x=k)$$

where　$p(x=k)=(0.1)^{k-1}\times 0.9$

7－8

解：　令X表所須檢查的次數

$$則P(x=k)=\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{k-2}}{\binom{10}{k-1}}\times\frac{1}{10-(k-1)}\qquad(k\geq 2)$$

〔若須選k次，則前$k-1$個中必僅含一個不良品而第k個必爲defective〕

$$E(x)=\sum_{k=2}^{10}k\cdot P(x=k)$$

$$=\sum_{k=2}^{10}k\cdot\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{k-2}}{\binom{10}{k-1}}\times\frac{1}{10-(k-1)}$$

7－9

解：　令X表被檢查出來的有缺陷之馬達的數目。

則$X=0$　or　1

令Y表獲利，則$Y=100\times 10-750$

$=250$　　　　若$x=0$

$Y=-750$　　　　若$x=1$

$$又P(X=0)=\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{72}{90}=0.8$$

$$P(X=1)=\frac{1\cdot\binom{9}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{18}{90}=0.2$$

$$E(Y)=250\times 0.8+(-750)\times 0.2$$

$$=200-150=50$$

7－10

解：　(a) $\sum_{d=1}^{4}P(D=d)=1$

$$\therefore C\left[2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right]=1$$

$$C\left[2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right]=1$$

$$6C=1\quad,\quad C=\frac{1}{6}$$

(b) $E(D)=\sum_{d=1}^{4} d\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2^d}{d!}$

$=\frac{1}{6}\left[1\cdot 2+2\cdot\frac{2^2}{2!}+3\cdot\frac{2^3}{3!}+4\cdot\frac{2^4}{4!}\right]$

$=\frac{1}{6}\left[2+4+\frac{2^3}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right]$

$=\frac{1}{6}\times\frac{38}{3}$

$=\frac{19}{9}$

(c)令Y表獲利

則$Y=5K$　　　　若　$D\geq K$

$=5D-3(K-D)$

$-8D-3K$　　　　若　$D<K$

K \ D	1	2	3	4
1	5	5	5	5
2	2	10	10	10
3	−1	7	15	15
4	−4	4	12	20

$P(D=1)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{3}$

$P(D=2)=\frac{1}{3}$

$P(D=3)=\frac{2}{9}$

$P(D=4)=\frac{1}{9}$

7－11

解：　(1)則獲利Y的機率分配為

$K=1$時　　　$P(Y=5)=1$

$K=2$時　　　$P(Y=2)=\frac{1}{3}$

$P(Y=10)=\frac{2}{3}$

$K=3$時　　　$P(Y=-1)=\frac{1}{3}$

$P(Y=7)=\frac{1}{3}$

$P(Y=15)=\frac{1}{3}$

$K=4$時　　$P(Y=-4)=\frac{1}{3}$

$P(Y=4)=\frac{1}{3}$

$P(Y=12)=\frac{2}{9}$

$P(Y=20)=\frac{1}{9}$

$K\geq 5$時　　$P(Y=8D-3K)=\frac{1}{6}\frac{2^d}{d!}$

$d=1,2,3,4$

(2)$K=1$　　$E(Y)=5$

$K=2$　　$E(Y)=2\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$

$K=3$　　$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{3}+7\times\frac{1}{3}+15\times\frac{1}{3}$

$=7$

$K=4$　　$E(Y)=(-4)\times\frac{1}{3}+4(\frac{1}{3})+12\times\frac{1}{9}$

$+20\times\frac{1}{9}=\frac{44}{9}$

$K\geq 5$

$$
\begin{aligned}
E(Y)=&(8-3K)\times P(D=1)\\
&+(16-3K)\times P(D=2)\\
&+(24-3K)\times P(D=3)\\
&+(32-3K)\times P(D=4)\\
=&\frac{1}{3}(8-3K)+\frac{1}{3}(16-3K)\\
&+\frac{2}{9}(24-3K)+\frac{2}{9}(32-3K)\\
=&\frac{152}{9}-3K
\end{aligned}
$$

故每天生產2個時獲利的期望值最高。

7－12

解：　(a)由定理6－4　*the pdf of Z is*

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g\left(\frac{z}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right| dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{8}{x^3}\right)\left(2\cdot\frac{z}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

而 x，z 須滿足條件

① $x>2$

② $0<\frac{z}{x}<1$　　　若　$0<z<x$

故(1)若 $z>2$

$$h(z)=\int_{z}^{\infty} 16\cdot\frac{z}{x^5}\,dx$$

$$=16z\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x^4}\Big|_{z}^{\infty}=\frac{4}{z^3}$$

(2)若 $0<z<2$

$$h(z)=\int_{2}^{\infty} 16\cdot\frac{z}{x^5}\,dx=\frac{z}{4}$$

$\therefore Z$ 的 pdf 爲

$$h(z)=\frac{4}{z^3}\qquad z>2$$

$$=\frac{z}{4}\qquad 0<z<2$$

$$=0\qquad elsewhere$$

(b)(1) $E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z\,h(z)\,dz$

$$=\int_{0}^{2} z\cdot\frac{z}{4}dz+\int_{2}^{\infty} z\cdot\frac{4}{z^2}\,dz$$

$$=\frac{1}{12}z^3\Big|_{0}^{2}+(-4)\frac{1}{z}\Big|_{2}^{\infty}=\frac{8}{3}$$

(2)因 X，Y 互爲獨立

$E(Z)=E(X,Y)$

$=E(X)E(Y)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{8}{x^3}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot 2y\cdot dy$$

$$=\int_{2}^{\infty}\frac{8}{x^2}\,dx\cdot\int_{0}^{1} 2y^2\,dy$$

$$=\left[-8\frac{1}{x}\Big|_{2}^{\infty}\right]\times\left[\frac{2}{3}y^{3}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$=\frac{8}{3}$$

7－13

解：(a)由定理 5－1

$$g(w)=f(x)\left|\frac{dx}{dw}\right|\Big|_{x=3w}=\frac{8}{27w^{3}}\times 3=\frac{8}{9w^{3}}$$

$\because 3w>2 \qquad \therefore w=\frac{2}{3}$

$$E(w)=\int_{-\infty}^{\infty}w\,g(w)\,dw=\int_{\frac{2}{3}}^{\infty}w\frac{8}{9w^{3}}\,dw$$

$$=\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{w}\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{\infty}=\frac{4}{3}$$

(b)$E(w)=\frac{1}{3}E(x)=\frac{1}{3}\int_{2}^{\infty}x\cdot\frac{8}{x^{3}}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{x}\Big|_{2}^{\infty}\right)=\frac{4}{3}$$

7－14

解：

出現6之概率$P=\frac{1}{6}$　，　$n=72$

因X爲一二項分配

$\therefore E(x)=np=72\times\frac{1}{6}=12$

$V(x)=np(1-p)=10$

$E(x^{2})V(x)+E(x)^{2}=10+144=154$

7－15

解：(a)由 5－2

$g(y)=\frac{1}{6} \qquad 7<y<13$

Y爲均勻分配於（7，13）

故$E(Y)=\frac{a+b}{2}=\frac{7+13}{2}=10$

$V(Y)=\frac{(b-a)^{2}}{12}=\frac{(13-7)^{2}}{12}=3$

(b) $h(z)=\frac{1}{2z}$ $\qquad e<z<e^3$

$=0$ $\qquad$ elsewhere

$\therefore E(Z)=\int_e^{e^3} z\cdot\frac{1}{2z}dz=\frac{1}{2}(e^3-e)$

$E(Z^2)=\int_e^{e^3} z^2\frac{}{2z}dz=\frac{1}{4}z^2\Big|_e^{e^3}=\frac{1}{4}(e^6-e^2)$

$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$

$=\frac{1}{4}(e^6-e^2)-\frac{1}{4}(e^3-e)^2$

$=(e^3-e)\left[\frac{1}{4}(e^3+e)-\frac{1}{4}(e^3-e)\right]$

$=\frac{1}{2}e(e^3-e)$

7－16

解：

由5－3 ，$g(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}e^{-y^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad y>0$

$E(Y)=\int_0^{\infty} y\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}e^{-y^{\frac{1}{3}}}dy$

令 $\quad z=y^{\frac{1}{3}}$

$dz=\frac{1}{3}y^{\frac{}{3}\frac{2}{3}}dy$

$\therefore E(Y)=\int_0^{\infty} z^3e^{-z}dz$

令 $\quad u=z^3$, $\quad dv=e^{-z}dz$

$du=3z^2dz$, $\quad v=-e^{-z}$

$\therefore E(Y)=-z^3e^{-z}\Big|_0^{\infty}+3\int_0^{\infty} z^2e^{-z}dz$

令 $\quad u=z^2$ $\quad dv=e^{-z}dz$

$du=2zdz$ $\quad v=-e^{-z}$

$E(Y)=\left[-z^3e^{-z}-3z^2e^{-z}\right]_0^{\infty}+6\int_0^{\infty} ze^{-z}dz$

令 $\quad u=z$ $\quad dv=e^{-z}dz$

$du=dz$ $\quad v=-e^{-z}$

$E(Y)=[-z^3e^{-z}-3z^2e^{-z}-6ze^{-z}-6e^{-z}]\Big|_0^{\infty}$

由 L' $Hospital's$ $rule$ 知

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^3}{e^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{3z^2}{e^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{6z}{e^z}$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{6}{e^z}=0$$

$\therefore E(Y)=6e^0=6$

7 − 17

解：(a)由問題 5 − 5

$$g(y)=\frac{1}{2}(y-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E(Y)=\int_1^2 y\cdot\frac{1}{2}(y-1)^{-\frac{1}{2}}dy$$

令 $u=y-1$　　　　$\therefore du=dy$

$y=u+1$

$$E(y)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u+1}{u^{\frac{1}{2}}}du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1\right]=\frac{4}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_1^2 y^2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y-1}}dy$$

令 $u=y-1$　　　　$dv=dy$

$y^2=(u+1)^2$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u^2+2u+1}{u^{\frac{1}{2}}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}+2\right)=\frac{28}{15}$$

$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$

$$=\frac{8}{15}-\frac{16}{9}=\frac{4}{45}$$

(b) $h(y)=\frac{1}{z^2}$ $\qquad \frac{1}{2}<z<1$

$$E(Z)=\int_{\frac{1}{2}}^{1} z\cdot\frac{1}{z^2}\,dz=\ln z\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\ln 2=0.095$$

$$E(Z^2)=\int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2\cdot\frac{1}{z^2}\,dz=\frac{1}{2}$$

$$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=0.5-(0.695)^2$$
$$=0.018$$

7－18

解：

(a) $g(y)=\frac{1}{\pi}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad -1<y<1$

因 $g(y)$ 對 $y=0$ 軸對稱

$\therefore E(Y)=0$

(b) $h(z)=\frac{2}{\pi}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz$

令 $\quad u=1-z^2$ $\qquad du=-2z\,dz$

$$E(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{1}^{0}u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{\pi}2\cdot u^{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{0}$$
$$=\frac{2}{\pi}$$

(c) $h(w)=1$ $\qquad 0<w<1$

$$E(w)=\int_{0}^{1} w\,dw=\frac{1}{2}w^2\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

7－19

解： $g(V)=\frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]$ $\qquad 0<v<\frac{4\pi}{3}$

$$E(V)=\int_{0}^{\frac{4}{3}\pi} v\cdot g(v)\,dv$$

$$=\int_{0}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}-v\right]dv$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{3}{5}v^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}v^2\Big|_{0}^{\frac{4}{3}\pi}\right]$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left[\frac{3}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{16\pi^2}{9}=\frac{4}{15}\pi$$

$$E(V^2)=\int_0^{\frac{4\pi}{3}} v^2 g(v)\,dv$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{5}{3}}-v^2\,dv$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left[\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{3}{8}v^{\frac{8}{3}}-\frac{1}{3}v^3\Big|_0^{\frac{4}{3}\pi}\right]$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left[\frac{3}{8}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^3\right]$$

$$=\frac{3}{2\pi}\times\frac{1}{24}\times\left(\frac{4\pi}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\pi^2$$

$$V(Z)=E(V^2)-(E(V))^2$$

$$=\frac{4}{27}\pi^2-\frac{16}{225}\pi^2=\frac{52}{675\pi}\pi^2$$

7－20

解：(1) $k<a$　　　$y\neq 0$

$g(0)=1$

$g(y)=0$

$\therefore E(Y)=0$，　$E(Y^2)=0$，　$V(Y)=0$

(2) $a<k<x_0$

$$g(0)=\frac{a}{k}$$

$$g(y)=\frac{x_0-a}{k y_0}\qquad 0<y<y_0\quad\frac{k-a}{x_0-a}$$

$$E(Y)=\int_0^{y_0\frac{k-a}{x_0-a}} y\cdot g(y)\,dy$$

$$=\frac{x_0-a}{k y_0}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{y_0\frac{k-a}{x_0-a}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{y_0(k-a)^2}{k(x_0-a)}$$

$$E(Y^2)=\int_0^{y_0\frac{k-a}{x-a}} y^2\frac{x_0-a}{k y_0}dy$$

$$=\frac{x_0-a}{k y_0}\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{y_0\frac{k-a}{x_0-a}}$$

$$=\frac{y_0^2(k-a)^3}{3k(x_0-a)^2}$$

$$V(Y)=\frac{y_0^2(k-a)^3}{3k(x_0-a)^2}-\frac{y_0^2(k-a)}{4k^2(x_0-a)^2}$$

$$=\frac{y_0^2(k-a)^3}{k(x_0-a)^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{(k-a)}{4k}\right)$$

$$=\frac{y_0^2(k-a)^3}{k(x_0-a)^2}\left(\frac{1}{12}+\frac{a}{4k}\right)$$

(3) $k>x_0$

$$g(0)=\frac{a}{b}$$

$$g(y)=\frac{x_0-a}{k y_0}\qquad 0<y<y_0$$

$$g(y_0)=1-\frac{x_0}{k}$$

$$E(Y)=y_0\left(1-\frac{x_0}{k}\right)+\int_0^{y_0} y\frac{x_0-a}{k y_0}dy$$

$$=\frac{x_0-a}{k y_0}\frac{1}{2}y_0^2+y_0-\frac{x_0 y_0}{k}$$

$$=y_0\left(1-\frac{x_0+a}{2k}\right)$$

$$E(Y^2)=y_0^2\left(1-\frac{x_0}{k}\right)+\int_0^{y_0} y^2\cdot\frac{x_0-a}{k y_0}dy$$

$$=y_0^2-\frac{x_0 y_0^2}{k}+\frac{x_0-a}{k y_0}\cdot\frac{1}{3}y_0^3$$

$$^2\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{x_0}{k}-\frac{a}{3k}\right)$$

$$=y_0^2\left(1-\frac{3x_0+a}{3k}\right)$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2$$

$$=y_0^2\left(1-\frac{2x_0+a}{3k}\right)-y_0^2\left(1-\frac{x_0+a}{2k}\right)^2$$

$$= y_0^2 \left[\frac{x_0 + a}{k} - \frac{2x_0 + a}{3k} - \frac{(x_0 + a)^2}{4k} \right]$$

$$= y_0^2 \left(\frac{x_0 + a}{3k} - \frac{(x_0 + a)^2}{4k^2} \right)$$

7－21

解：

$$E(A) = \int_2^4 \int_1^{\frac{2}{y}} xy \frac{1}{2}(x-1)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{\frac{4}{y}}^2 xy \frac{1}{2}(x-1)\,dx\,dy$$

$$+ \cdots\cdots + \int_{\frac{8}{y}}^4 \int_{\frac{8}{y}}^3 xy \frac{1}{2}(-x+3)\,dx\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(a)}$$

$$E(A^2) = \int_2^4 \int_1^{\frac{4}{y}} x^2 y^2 \frac{1}{2}(x-1)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{\frac{4}{y}}^2 x^2 y^2 (x-1)\,dx\,dy$$

$$+ \cdots\cdots + \int_{\frac{8}{y}}^4 \int_{\frac{8}{y}}^3 x^2 y^2 \frac{1}{2}(x+3)\,dx\,dy$$

$$V(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

7－22

解：

$$E(H) = \int_9^{\frac{40}{3}} h \frac{(1600 - 9h^2)}{80h^2}\,dh + \int_{\frac{20}{3}}^8 h \frac{1}{5}\,dh$$

$$+ \int_4^{\frac{20}{3}} h \frac{(5h^2 - 80)}{16h^2}\,dh \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(a)}$$

$$E(H^2) = \int_8^{\frac{40}{3}} h^2 \frac{(1600 - 9h^2)}{}\,dh + \int_{\frac{20}{3}}^8 h^2 \frac{1}{5}\,dh$$

$$+ \int_4^{\frac{40}{3}} h^2 \frac{(5h^2 - 80)}{16h^2}\,dh$$

$$V(H) = E(H^2) - [E(H)]^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

7－23

解：　由〔6・13〕得 $p(w) = 6 + 6w - 12\sqrt{w} \qquad 0 < w < 1$

$$\therefore E(W) = \int_9^1 w\,p(w)\,dw = \int_0^1 6w + 6w^2 - 12w^{\frac{3}{2}}\,dw$$

$$= 3w^2 + 2w^3 - \frac{24}{5} w^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$E(W^2)=\int_0^1 w^2(6+6w-12\sqrt{w})\,dw$$
$$=2w^3+\frac{3}{2}w^4-\frac{24}{7}w^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{14}$$
$$V(W)=D(W^2)-[E(W)]^2$$
$$=\frac{1}{14}-\frac{1}{25}=\frac{11}{350}$$

7－24

解： $Y=ax-b$

$$E(Y)=aE(X)-b=0$$
$$V(Y)=a^2V(X)=1$$
$$\begin{cases}10a-b=0 & a=\frac{1}{5}\\ 25a^2=1 & b=2\end{cases}$$

7－25

解： (a) $f(s)=1 \qquad 0<s<1$

$$g(n)=\frac{1}{2} \qquad 0<n<2$$

因S . N爲均勻分配

$$E(S)=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$
$$E(N)=\frac{2+0}{2}=1$$
$$S'=S+N$$
$$E(S')=E(S)+E(N)$$
$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(b) $P=\dfrac{V^2}{R}$

$$E(P)=\frac{1}{R}E(V^2)=\frac{1}{R}E(S')^2$$

因S，N互爲獨立

$$V(S')=V(S)+V(N)$$
$$=\frac{(1-0)^2}{12}+\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{5}{12}$$

$$E(S'^2)=V(S')+E(S')^2$$
$$=\frac{5}{12}+\frac{9}{4}=\frac{8}{3}$$
$$E(P)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

7－26

解：　$V(X)=\frac{[3a-(-a)]^2}{2}=\frac{16a^2}{12}=\frac{4}{3}a^2$

7－27

解：　令 Y_i 表第 i 次射擊所得的分數

則 $Y_i=4, 3, 2, \text{ or } 0$

且令 Y 表 5 次射擊所得之分數

$$Y=\sum_{i=1}^{5}Y_i \qquad Y_i \text{ 間互爲獨立}$$

$$\therefore P(Y_i=4)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f(r)\,dr=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+r^2}\,dr$$
$$=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}r\,\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y_i=3)=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}f(r)\,dr=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}r\,\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P(Y_i=2)=\int_1^{\sqrt{3}}f(r)\,dr=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}r\,\Big|_1^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P(Y_i=0)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{3}$$

$$E(Y_i)=4\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{13}{6}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}E(Y_i)=\frac{13}{6}\times 5=\frac{65}{6}$$

7－28

解： $E(Y)=E(x^2)=\int_0^{\infty} x^2\, 2x e^{-x^2}\, dx$

令 $u=x^2$, $du=2x\,dx$

$E(Y)=\int_0^{\infty} u e^{-u}\, du$

令 $s=u$, $dt=e^{-u}du$

$ds=du$, $t=-e^{-u}$

$E(Y)=-ue^{-u}-e^{-u}\Big|_0^{\infty}$

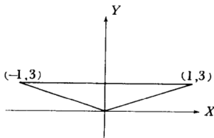
又由 L' $Hospital's\ rule$

$\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^u}=0$

$E(Y)=1$

7－29

解： 因 (X, Y) 爲二維均匀分配



$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{area(R)}=\frac{1}{3}$

$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$=\int_{3x}^{2}\frac{1}{3}dy$

$=\frac{1}{3}(3-3|x|)$

$=1-|x| \qquad -1<x<1$

$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

$=\int_{-\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y}\frac{1}{3}dy=\frac{2}{9}y \qquad 0<y<3$

(1) $E(X)=\int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx$

$=\int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx+\int_0^1 x(1-x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]\Big|_0^1$

$$= -\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=0$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx+\int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]\Big|_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]\Big|_{0}^{1}$$

$$=-\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{6}$$

$$\therefore V(X)=\frac{1}{6}$$

(2) $E(Y)=\int_{0}^{3} y\cdot\frac{2}{9}y\,dy=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{0}^{3}=2$

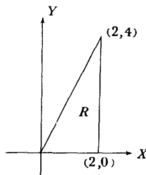
$$E(Y^2)=\int_{0}^{3} y^2\cdot\frac{2}{9}y\,dy=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}y^4\Big|_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

$$V(Y)=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$$

7－30

解：(a)因 (X, Y) 爲二維均勻分配

$$f(x,y)=\frac{1}{area(R)}=\frac{1}{4}$$



$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{0}^{2x}\frac{1}{4}\,dy$$

$$=\frac{x}{2}\qquad 0\le x\le 2$$

$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_{\frac{y}{2}}^{2}\frac{1}{4}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}y\qquad 0\le y\le 4$$

(b) $E(X)=\int_{0}^{2} x\cdot\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{0}^{2}=\frac{4}{3}$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2=2$$

$$V(X)=2-(\frac{4}{3})^2=\frac{2}{9}$$

(c) $$E(Y)=\int_0^4 y(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}y)dy=[\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{24}y^3]\Big|_0^4$$

$$=\frac{4}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_0^4 y^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}y)dy=[\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{32}y^4]\Big|_0^4$$

$$=\frac{32}{6}-8=\frac{8}{3}$$

$$V(Y)=\frac{8}{3}-(\frac{4}{3})^2=\frac{8}{9}$$

7－31

解： $Z=H(X,Y)=\frac{H}{Y}$

由定理7－7

$$E(Z)\cong H(\mu_x,\mu_y)+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sigma_x^2+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\sigma_y^2]$$

$$V(Z)\cong[\frac{\partial H}{\partial x}]^2\sigma_x^2+[\frac{\partial H}{\partial y}]^2\sigma_y^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial X}=\frac{1}{Y} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial Y}=-\frac{x}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=2\cdot\frac{x}{y^3}$$

$$E(Z)\cong\frac{\mu_x}{\mu_y}+\frac{1}{2}(0+\frac{2x}{y^3}\sigma_y^2)\Big|_{(\mu_x,\mu_y)}$$

$$=\frac{\mu_x}{\mu_y}+\frac{\mu_x}{\mu_y^3}\sigma_y^2$$

$$V(Z)\cong[\frac{1}{y^2}\sigma_x^2+\frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2]\Big|_{(\mu_x,\mu_y)}$$

$$=\frac{1}{\mu_y^2}\sigma_x^2+\frac{\mu_x^2}{\mu_y^4}\sigma_y^2$$

7－32

解： (a)因X，Y爲均匀分配。

$$g(x) = 1 \qquad 1 < x < 2$$

$$h(y) = 1 \qquad 1 < y < 2$$

$$E(X) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = \mu_x$$

$$E(X) = \mu_y = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{(2-1)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$V(Y) = \frac{1}{12}$$

$$E(Z) \cong \frac{\mu_x}{\mu_y} + \frac{\mu_x}{\mu_y^3} \quad \sigma_y^2$$

$$= 1 + \frac{\frac{2}{3}}{(\frac{3}{2})^3} \quad \overline{12} \qquad 1 + \frac{4}{9} \times \frac{1}{12} = \frac{28}{27}$$

$$V(Z) = \frac{1}{\mu_y^2} \ \sigma_x^2 + \frac{\mu_x^2}{\mu_y^4} \ \sigma_y^2$$

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z g(z) dz$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} z \cdot \frac{1}{2} (4 - \frac{1}{z^2}) dz + \int_{1}^{2} z \cdot \frac{1}{2} (\frac{4}{z^2} - 1) dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4z - \frac{1}{z}) dz + \frac{1}{2} \int_{1}^{2} (\frac{4}{z} - z) dz$$

$$= \frac{1}{2} [2z^2 - \ln z \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}] + \frac{1}{2} [4 \ln z - \frac{z^2}{2} \Big|_{1}^{2}]$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{3}{2} - \ln 2] + \frac{1}{2} [4 \ln 2 - \frac{3}{2}]$$

$$= \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \times 0.693 = 1.038$$

$$E(z^2) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^2 \cdot \frac{1}{2} (4 - \frac{1}{z^2}) dz + \int_{1}^{2} z^2 \cdot \frac{1}{2} (\frac{4}{z^2} - 1) dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4z^2 - 1) dz + \frac{1}{2} [\int_{1}^{2} (4 - z^2) dz]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}z^3-z\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]+\frac{1}{2}\left[4z-\frac{1}{3}z^3\Big|_{1}^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{7}{6}$$

$$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$$

$$=\frac{7}{6}-(1.038)^2$$

$$=1.165-1.078=0.087$$

$$=\frac{1}{3\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{1}{12}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{27}$$

(b)由公式

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty}g(vz)h(v)|v|dv$$

且 $1<vz<2$ $\qquad\therefore\frac{1}{z}<v<\frac{2}{z}$ ……………①

$1<v<2$ …………………②

又 $\frac{1}{2}<\frac{1}{v}<1$

$\frac{1}{v}<z<\frac{2}{v}$

$\frac{1}{2}<z<2$

①若 $\frac{1}{2}<z<1$，則 $\frac{1}{z}>1$，$\frac{2}{z}>2$

由條件①，②

$$g(z)=\int_{\frac{1}{z}}^{2}g(vz)h(v)|v|dv$$

$$=\int_{\frac{1}{z}}^{2}1\cdot1\cdot v\,dv=\frac{1}{2}v^2\Big|_{\frac{1}{z}}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{z^2}\right)$$

②若 $1<z<2$

則 $\frac{1}{2}<\frac{1}{z}<1$，$\quad 1<\frac{2}{z}<2$

由條件①，②

$$g(z)=\int_{1}^{\frac{2}{z}} g(vz)h(v)|v|dv$$

$$=\int_{1}^{\frac{2}{z}} 1\cdot 1\cdot v\,dv=\frac{1}{2}v^{2}\Big|_{1}^{\frac{2}{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{z^{2}}-1\right)$$

7－33

解：　因X之pdf $f(x)$對$x=a$軸對稱

令$X'=x=a$

則$f(x)$對$x'=0$對稱

$E(X')=0$

$E(X')=E(X)-a$

$E(X)=a$

7－34

解：

(a) $E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0$

$E(X^{2})=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1$

$V(X)=1$

由切氏不等式

$P[\,|X-E(X)|\geq k\sqrt{V(X)}\,]\leq\frac{1}{k^{2}}$

$\therefore P[\,|X|\geq k\,]\leq\frac{1}{k^{2}}$

令$f(k)=P[\,|X-E(X)|\geq k\sqrt{V(X)}\,]$

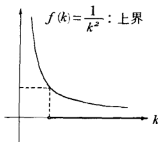
則$f(k)=P[\,|X|\geq k\,]\leq\frac{1}{k^{2}}$

…………見圖

而$|X|=1$

$\therefore k\leq 1\Rightarrow f(k)=1$

$k>1\Rightarrow f(k)=0$



(b) $X=-1$　　$P(X=-1)=\frac{1}{3}$

$X=1$　　$P(X=1)=\frac{2}{3}$

$$E(X)=(-1)\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=1$$

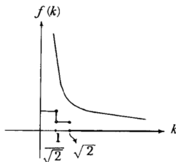
$$V(X)=1-(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$$

令 $f(k)=P\left[\,|X-E(X)|\geqq k\sqrt{V(X)}\,\right]$

則 $f(k)=P\left[\,|x-\frac{1}{3}|\geqq\frac{2\sqrt{2}}{3}k\,\right]\leqq\frac{1}{k^2}$

$X=1\ ,\ -1$

$|x-\frac{1}{3}|=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$



①$X=-1\ ,\Rightarrow\frac{4}{3}\geqq\frac{2\sqrt{2}}{3}k$

　　$i.e.\quad k\leqq\sqrt{2}$

②$X=1\Rightarrow\frac{2}{3}\geqq\frac{2\sqrt{2}}{3}k$

　　$i.e.\quad k\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

由①，②

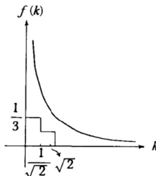
$$k\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f(k)=1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<k\leqq\sqrt{2}\Rightarrow f(k)=\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2}<k\Rightarrow f(k)=0$$

則 $f(k)=P(X=-1)$

$$=\frac{1}{3}$$



③若 $k>\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}k>\frac{4}{3}$

則 $f(k)=0$

7－35

解：　$f(x)=\frac{1}{4}$　　　　　　$-1<x<3$

$$E(X)=\frac{3-1}{2}=1$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

由切氏不等式

$$P[\,|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}\leq\frac{1}{2^2}$$

故上界爲$\frac{1}{4}$

又$P[\,|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}\,]=P[\,|X-1|\geq\frac{4}{\sqrt{3}}]$

$$=1-P[\,|X-1|<\frac{4}{\sqrt{3}}]$$

$$=1-P[-\frac{4}{\sqrt{3}}<X-1<\frac{4}{\sqrt{3}}]$$

〔因X均匀分配於$(-1,3)$

$P(-1<X<3)=1$〕

$$=1-P[1-\frac{4}{\sqrt{3}}<X<1+\frac{4}{\sqrt{3}}]$$

$$=1-P(-1.33<X<3.33)$$

$$=1-1=0$$

7－36

解：　$E[(x-\alpha)^2]-[E(x)-\alpha]^2$

$=E[x^2-2\alpha x+\alpha^2]-[E(x)^2-2\alpha E(x)+\alpha^2]$

$=E(x^2)-2\alpha E(x)+\alpha^2-E(x)^2+2\alpha E(x)-\alpha^2$

$=E(x^2)-E(x)^2$

$=V(x)$

7－37

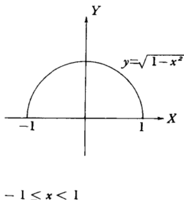
解：　因(X,Y)均匀分配於R

$$f(x,y)=\frac{1}{area(R)}=\frac{2}{\pi}$$

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{0}^{1+x22}\frac{2}{\pi}\,dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\qquad -1\leq x\leq 1$$



$$h(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-1-y^2}^{1-y^2}\frac{2}{\pi}\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad 0\le y\le 1$$

因 $g(x)$ 對 $x=0$ 軸對稱

$E(X)=0$

$$E(X,Y)=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} xyf(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}xy\,dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}xy^2\Big|_{0}^{1-x^2}\right]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x(1-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$=0$$

$$\rho_{xy}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=0$$

7－38

解：$\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} f(x,y)\,dx\,dy=1$

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{x}^{1} ke^{-y}\,dy\right]dx$$

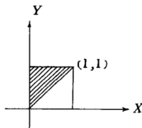
$$=\int_{0}^{1}\left(-ke^{-y}\Big|_{x}^{1}\right)dx$$

$$=\int_{0}^{1}k\left(e^{-x}-e^{-1}\right)dx$$

$$=k\left\{-e^{-x}-e^{-1}x\Big|_{0}^{1}\right\}$$

$$=k\left[-e^{-1}-e^{-1}+1\right]$$

$$=1$$



$$\therefore k=\frac{1}{1-2e^{-1}}$$

The marginal pdf

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{x}^{1} ke^{-y}dy$$

$$=-ke^{-y}\Big|_{x}^{1}=k(e^{-x}-e^{-1})$$

$$h(y)=\int_{0}^{y} ke^{-y}dx=ke^{-y}x\Big|_{0}^{y}=kye^{-y}$$

$$E(X)=\int_{0}^{1} kx(e^{-x}-e^{-1})dx$$

$$=k\left[-e^{-1}\frac{x^2}{2}+(-x-1)e^{-x}\right]\Big|_{0}^{1}$$

$$=k\left[-e^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+((-2)e^{-1}+1)\right]$$

$$=k\left[-\frac{5}{2}e^{-1}+1\right]$$

$$=2k(2-5e^{-1})$$

$$E(Y)=\int_{0}^{1} y\cdot kye^{-y}dy$$

$$=k\left[-y^2e^{-y}-2ye^{-y}-2e^{-y}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$=k\left[2-5e^{-1}\right]$$

$$EE(X^2)=\int_{0}^{1} kx^2(e^{-x}-e^{-1})dx$$

$$=k\left[(2-5e^{-1})-e^{-1}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}\right)\right]$$

$$=k\left[2-\frac{16}{3}e^{-1}\right]=3k\left[6-16e^{-1}\right]$$

$$E(Y^2)=\int_{0}^{1} y^2\,kye^{-y}dy$$

$$=k\left[-y^3e^{-y}-3y^2e^{-y}-6ze^{-y}-6e^{-y}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$=k\left[6-16e^{-1}\right]$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=k\left(2-\frac{16}{3}e^{-1}\right)-k^2\left(1-\frac{5}{2}e^{-1}\right)^2$$

$$=k\left[2-\frac{16}{3}e^{-1}-k\left(1-\frac{5}{2}e^{-1}\right)^2\right]$$

$$V(Y)=k[6-16^{-1}-k^2(2-5e^{-1})^2]$$
$$=k[6-16e^{-1}-k(2-5e^{-1})^2]$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_x^1 xyke^{-y}\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1 kx[-ye^{-y}-e^{-y}\Big|_x^1]\,dx$$
$$=\int_0^1 kx(e^{-x}-xe^{-x})\,dx$$
$$=k[-xe^{-x}-e^{-x}+x^2e^{-x}+2xe^{-x}+2e^{-x}\Big|_0^1]$$
$$=k(3e^{-1}-1)$$

$$\rho_{xy}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

將上述值分別代入且 $k=\dfrac{1}{1-2e^{-1}}$ 則可得 ρ_{xy}

7－39

解： (a) $P(X=-1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$$P(X=0)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$
$$P(Y=-1)=\frac{3}{8}$$
$$P(Y=0)=\frac{2}{8}$$
$$P(Y=1)=\frac{3}{8}$$
$$P(X)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}=0$$
$$E(Y)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}=0$$
$$P(XY=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=-1,Y=-1)$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$P(XY=-1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

$E(XY)=1\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot(\frac{1}{4})=0$

$E(XY)=E\cdot(X)E(Y)=0 \qquad \therefore \rho=0$

(b) $P(X=1)=\frac{3}{8}$

$P(Y=1)=\frac{3}{8}$

而 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8}$

$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)\times P(Y=1)$

故 X, Y 不互爲獨立。

(c)(1)假設上表變爲如下 $(0\leq s, t\leq 1)$

Y \ X	−1	0	1
−1	s	t	s
0	t	0	t
1	s	t	s

則 $P(X=-1)=P(X=1)=P(Y=-1)$

$=P(Y=1)=2s+t$

$P(X=0)=P(Y=0)=2t$

$E(X)=-1\cdot(2s+t)+1\cdot(2s+t)=0$

$E(Y)=-1\cdot(2s+t)+1\cdot(2s+t)=0$

$P(XY=1)=2s \quad , \quad P(XY=-1)=2s$

$E(XY)=1\cdot 2s+(-1)(2s)=0$

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=0$

$\therefore \rho=0$

(2) $P(X=1,Y=1)=s$

$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)=(2s+t)^2$

故 X, Y 不互爲獨立。

7 − 40

解：　$X(s)=1 \qquad s\in A$

$\qquad =0 \qquad s\notin A$

$Y(s)=1 \qquad s\in A$

$\quad =0 \qquad s\notin B$

$P(A)=P\{s \mid s\in A\}=P(X(s)=1)$

$\quad =P(X=1)$

$E(X)=1\cdot P(A)=P(X=1)$

$E(Y)=1\cdot P(B)=P(Y=1)$

而$XY=1 \qquad s\in A \quad and \quad s\in B$

$\quad =0 \qquad s\notin A \quad or \quad s\notin B$

$\therefore E(XY)=1\cdot P\{s \mid s\in A$ 且 $s\in B\}=P(A\cap B)$

又 $E(X)E(Y)=P(A)\cdot P(B)$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

故X，Y互為獨立。

7－41

解： $V=AX+B$

$W=CY+D$

$E(V)=AE(X)+B$

$E(W)=CE(Y)+D$

$V(V)=A^2V(X)$

$W(W)=C^2V(Y)$

$E(VW)=E[(AX+B)(CY+D)]$

$\quad =E(ACXY+ADX+BCY+BD)$

$\quad =ACE(XY)+ADE(X)+BCE(Y)+BD$

$$\therefore \rho_{VW}=\frac{E(VW)-E(V)E(W)}{\sqrt{V(V)V(W)}}$$

$$=\frac{ACE(XY)-ACE(X)E(Y)}{|A||C|\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$=\frac{AB}{|AC|}\cdot\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$=\frac{AC}{|AC|}\rho_{xy}$$

7－42

解： 有誤

7－43

解： X，Y獨立， $\therefore f(x,y)=f_1(x)$

$$E(X\mid Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf(x\mid y)\,dx\right]f_2(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x f_2(y)\,dy$$

$$= \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\,dy = \mu_x$$

7－44

解：　$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$$E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x)\,dy$$

而 $f(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$　　代入上式

得　$E(Y \mid x) = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dy}{f_1(x)} = a + bx$

即　$\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dy = (a+bx)\,f_1(x)$ …………(1)

(1)式兩邊對 x 積分得

$E(Y) = a + bE(X)$

$i.e.\quad \mu_y = a + b\mu_x$ …………………(2)

(1)式兩邊先乘以 x 再對 x 積分得

$E(XY) = aE(X) + bE(X^2)$

$i.e.\quad \rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y = a\mu_x + b(\sigma_x^2 + \mu_x^2)$ …………(3)

由(2)(3)得　$a = \mu_y - \rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x$　，　$b = \rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$　代入(1)

$$E(Y \mid x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

7－46

解：

$\sigma_x = 5$　　　$V(X) = 25$

$\sigma_y = 12$　　　$V(Y) = 144$

$\sigma_z = 9$　　　$V(Z) = 81$

$U = X + Y$　　　$V = Y + Z$

因 X, Y, Z 爲互不相關

$V(U) = V(X) + V(Y) = 24 + 144 = 169$

$V(V) = V(Y) + V(Z) = 144 + 81 = 225$

$$\rho_{uv} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{V(U)V(V)}}$$

$$E(UV)=E[(X+Y)(Y+Z)]$$
$$=E(XY+XZ+Y^2+YZ)$$
$$=E(XY)+E(XZ)+E(Y^2)+E(YZ)$$
$$=E(X)E(Y)+E(X)E(Z)+E(Y^2)+E(Y)E(Z)$$
$$E(U)E(V)=E(X+Y)E(Y+Z)$$
$$=E(X)E(Y)+E(X)E(Z)+E(Y^2)$$
$$+E(Y)E(Z)$$
$$P_{uv}=\frac{E(Y^2)-E(Y)^2}{\sqrt{V(U)V(V)}}=\frac{V(Y)}{\sigma_u\sigma_v}=\frac{144}{13\times 15}=\frac{48}{65}$$

7－47

解： (a) $E(Y\mid x)=\mu_y+\rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-ux)$

$$=-\frac{3}{2}x-2$$

$$E(x\mid Y)=\mu_x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\mu_y)=-\frac{3}{5}y-3$$

$$\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=-\frac{3}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=-\frac{3}{5}\cdots\cdots(2)$$

$$\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x=-2\cdots\cdots(3)$$

$$\mu_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_y=-3\cdots\cdots(4)$$

(1)×(2) $\rho^2=\dfrac{9}{10}$ $\quad\therefore \rho=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(b) ∴(1)(2)代入(3)(4)

$$\mu_y+\frac{3}{2}\mu_x=-2\cdots\cdots(5)$$

$$\mu_x+\frac{3}{5}\mu_y=-3\cdots\cdots(6)$$

$(5)-(6)\times\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{10}\mu_y=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore \mu_y=25$

代入得 $\mu_x=-18$

故(a) $\rho = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　，　(b) $\mu_x = -18$

$\mu_y = 25$

第八章 卜氏分配及其他離散隨機變數

§8—1 卜氏分配 (The Poission Distribution)

在確定模式(deterministic models)中，某些函數關係扮演著很重要的角色。(例如：線性函數，二次函數，指數函數，三角函數，等等)，因此我們發現，當我們為觀察到的現象建立非確定模式(nondeterminstic models)時，某些機率分配往往比其他機率分配出現得多。有一個理由是如同在確定中的情況一樣，某些相對簡單的數學模型似乎能夠描述多數的現象。

本章中我們將詳細地討論幾個離散隨機變數，下一章則將討論連續隨機變數。

我們正式介紹下列隨機變數，以後我們將介紹在何種情況下，此隨機變數可代表隨機實驗的結果。

【定義】 設X是個離散隨機變數，其可能值為0，1，……n，……如果

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, \cdots\cdots n, \cdots \qquad (8\text{-}1)$$

我們說X為一卜氏分配(Poission Distribution)，其參數$\alpha > 0$

因為 $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha}\alpha^k / k!) = e^{-\alpha} e^{\alpha} = 1$

故上式為一合理的機率分配

【定理8－1】

如果X是一卜氏分配，其參數為α，則$E(X) = \alpha$ 且 $V(X) = \alpha$

【證明】

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{(k-1)!}$$

設$s = k-1$，則上式變為

$$E(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^{s+1}}{s!} = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^s}{s!} = \alpha$$

同樣

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{(k-1)!}$$

再設$s = k-1$ ，則

$$E(X^2)=\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\frac{e^{-\alpha}\alpha^{s+1}}{s!}=\alpha\sum_{s=0}^{\infty}s\frac{e^{-\alpha}\alpha^{s}}{s!}+\alpha\sum_{s=0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha}\alpha^{s}}{s!}$$

$$=\alpha^2+\alpha$$

因此

$$V(\alpha)=E(X^2)-[E(X)]^2=\alpha^2+\alpha-\alpha^2=\alpha$$

【附註】　卜氏分配有一個有趣的性質，卽期望值等於變異數。

§8－2　卜氏分配近似於二項式分配

(The poisson Distributon as an Approximation to the Binomial Distribution)

卜氏分配就其本身而言，它適合於描述多數的隨機現象，因此它扮演一個很重要的角色，在下一節中我們將加以討論。在這裏我們要討論的是卜氏分配近於於二項分配的重要性。

【例題8－1】　假設電話進入總機交換的次數，在某一3小時（180分鐘）內是270次，亦卽平均每分鐘1.5次，根據上面的事實，我們要計算在以後的三分鐘內總機收到電話的次數為0，1，2……次，等等的機率為何？

當我們考慮進入交換的電話的現象時，我們可以認為任何時刻進入的電話次數機率與其他時刻相同，亦卽，任一時刻的機率都相等。但問題是卽使在很短的時間區間內，電話次數不僅是無限而且不可數，因此我們需要導出一連串的估計值。

開始我們將三分鐘區間先細分為9個小區間，每區間20秒，然後我們可視每一小區間為柏努利試驗（Bernoulli trial），在每一試驗中，我們觀察進入交換的電話，有一次（成功）或沒有進入（失敗），其成功率$P=(1.5)(\frac{20}{60})=0.5$因此，我們可以說在三分鐘內，有兩次電話進入的機率為$(\frac{9}{2})(\frac{1}{2})^9=\frac{9}{128}$。

但是又有問題和麻煩了，因為我們忽略了在20秒內進入交換的電話次數有2次，3次，等等其他的情形出現，如果我們將此種可能性考慮在內，則上面使用的二項分配就有點不合理了！

為了避免此種問題出現，我們用第二種估計值，事實上，我們要使用一連串的估計值，有一種可令我們相當確定在一很短的時間區間內最多只有一次電話進入交換的方法是把時間區間縮成很短。因此，我們可以考慮將原來9個區間，每區間20秒的情形，換成18個區間，每個區間10秒鐘的更小區間，我們就可以將我們的實驗視為18個柏努利試驗，其成功率$P=1.5(\frac{10}{60})=0.25$，因而

在三分鐘內有兩次電話進入交換的機率是 $\binom{18}{2}(0.25)^2(0.75)^{16}$ 。雖然現在我們所考慮的二項分配 ($n=18$, $P=0.25$) 和原先的二項分配 ($n=9$, $P=0.5$) 並不一樣，但是期望值却是相同的，亦即 $nP=18(0.25)=9(0.5)=4.5$

如果我們照著這樣下去，將小區間的個數增加，亦即再縮小區間，我們將同時減少進入交換的電話次數的機率，因而 nP 保持不變。

上面的例子，使我們產生了一個問題，亦即如果 $n\to\infty$ 且 $p\to 0$ 而 np 保持不變，令 $np=\alpha$ ，則二項分配。

$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ 將會有何現象發生呢？

我們將從下列的演算中，得到答案

首先考慮二項分配機率的通式

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

令 $np=\alpha$ ，因此 $p=\dfrac{\alpha}{n}$

且 $1-p=1-\alpha/n=(n-\alpha)/n$ ，

又將 p 以其相等的 α 表示，亦即　以 $p=\dfrac{\alpha}{n}$ 　代入

則

$$P(X=k)=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^{n-k}$$
$$=\frac{\alpha^k}{k!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$
$$\left[1-\frac{\alpha}{n}\right]^{n-k}$$
$$=\frac{\alpha^k}{k!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$
$$\times\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k}$$

現在令 $n\to\infty$ ，使得 $np=\alpha$ 保持不變，這顯然是當 $n\to\infty$ 時，同時也 $p\to 0$ ，否則 np 不可能爲常數。

上式中，如 $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ ， $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ ……之各項，當 $n\to\infty$ 時趨近於 1 ，而

$(1-\frac{\alpha}{n})^{-k}$ 之値也是一樣，從 e 的定義，我們又知道，當 $n\to\infty$ 時，$(1-\frac{\alpha}{n})^{n}\to e^{-\alpha}$。

因此 $\lim_{n\to\infty} P(X=k)=e^{-\alpha}\alpha^{k}/k!$，亦即在其極限値時，我們得到一卜氏分配，其參數爲 α，我們將此重要結果總述於下。

【定理 **8－2**】X 是個二項分配隨機變數，其參數爲 P（乃基於 n 次重複），亦即

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

假設當 $n\to\infty$ 時，$np=\alpha$（常數），或當 $n\to\infty$，$p\to 0$ 使得 $np\to\alpha$，在這些條件下，我們得到

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k)=\frac{e^{-\alpha}\alpha^{k}}{k!}$$

此乃卜氏分配，其參數爲 α

【附註】 (a)上面的定理，其實是說，當 n 很大而 p 很小時我們可以以卜氏分配來估計二項分配。

(b)我們已證實如果 X 是二項分配，則 $E(X)=np$ 如果 X 是卜氏分配，則 $E(X)=\alpha$，（此卜氏分配之參數爲 α）。

(c)二項分配是由兩個參數，n 和 p 來決定，而卜氏分配則只由唯一的參數 $\alpha=np$ 來決定，此 α 代表在某單位時間內成功的期望次數，此參數有時也稱爲分配的強度（intensity of the distribution），我們須分別每單位時間內發生的期望次數，和在指定時間內發生的期望次數。例如：在例 8－1 中，其強度是每分鐘 1.5 次，因此 10 分鐘內的期望次數是 15 次。

(d)我們也可以考慮下面的理論，以求參數爲 α 的卜氏隨機變數 X 的變異數；X 可視爲參數是 n 和 p 的二項分配隨機變數 Y 的一個極限情形，此地 $n\to\infty$ 且 $p\to 0$，使得 $np\to\alpha$，因爲 $E(Y)=np$，$V(Y)=np(1-p)$，我們發覺在極限時 $V(Y)\to\alpha$。

卜氏分配的所有情形的圖表定很有用的，在附錄裏有此種分配的簡表。

讓我們考慮其他的三個例子，以說明前面所提到的卜氏分配的應用實例。

【例題 **8－2**】 在一個交通密集的地段，車子發生事故的機率很小，假設爲 $p=0.0001$。然而在一天的某一時間，如 4 p.m. 到 6 p.m. 之間，有許多車子經過此一地段，設爲 1000 輛，在這些條件下，求 4 p.m. 到 6 p.m. 之間發生事故兩次或更多次事件的機率爲何？

讓我們假定 p 值對每一輛車子都是一樣，又假設車子出是與否與其他車子無

關，（此項假定顯然不合乎事實，但我們仍然如此假定），於是我們可以假定如果X是1000輛車子出事的次數，則X為二項分配，其$p=0.0001$（另一項假設並沒有明確指出，是車子在4 *p.m.*到6 *p.m.*之間通過此地段的數目，我們已先定為1000，事實上，我們應將n視為隨機變數比較合理，然而我們並不如此做，而將n視為固定數值），因此我們可以求這〝已經假定〞的機率

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-(0.9999)^{1000}-1000(0.0001)(0.9999)^{999}$$

上面數值的演算並不很容易，因為n很大，P很小，我們將用定理8－2，而得到下述的估計值

$$P(X=k)\cong\frac{e^{-0.1}(0.1)^k}{k!}$$

因而

$$P(X\geq 2)\cong 1-e^{-0.1}(1+0.1)=0.0045$$

【例題8－3】 假設有一製造程序中所產生的產品，其不良品的比例為p，如果生產n件，則恰好有k件不良品的機率可由如下的二項分配中求出，如$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，其中$X$是不良品件數，如果$n$很大，$p$很小，則我們可估計為

$$P(X=k)\cong\frac{e^{-np}(np)^k}{k!}$$

例如我們假定1000件中有一件是不良品，則$P=0.001$因此利用二項分配，我們發覺500件產品中沒有不良品的機率是$(0.999)^{500}=0.609$。如果我們用卜氏估計值（Poisson approximation），此機率變為$e^{-0.5}=0.61$。而發現2件或更多件不良品的機率，依波氏估計值為$1-e^{-0.5}(1+0.5)=0.085$。

【例題8－4】 在製造玻璃瓶時，可以在熔融的玻璃中發現小而硬的質點；如果瓶子上有此種質點存在，則此玻璃瓶不合格必須被拋棄。此種質點我們假設它是隨機散佈在熔融玻璃內。我們將假定同量的融熔玻璃內含有同數的此種質點。今假定100公斤的熔融玻璃內，含有x個此種質點；又製造一個瓶子需要1公斤的熔融玻璃。

求產生的玻璃瓶為不良品，必需被拋棄的比例為何？初眼一看，此問題的〝解答〞也許是如此的：因為100個瓶子所需熔融的玻璃，含有x個此種質點，因此大約會有x%的瓶子是要被丟棄。然而此答案是不正確的，因為很可能一個要被丟棄的瓶子內，其所含質點改為1個以上，因而降低了玻璃的不良品的比例。

為了要求〝正確〞的答案，我們先有下面一些假定

(a)每個此種質點出現在熔融玻璃內的機率是一樣的。

(b)每個質點的分配互不影響。利用這些假定，我們可以將我們的問題簡化為下面

"缸(urn)"的模型。在N個缸子中，n個球任意分配於其上。問在一隨機抽取的缸子內，恰含k個球的機率為何：(此處，缸相當於瓶子，而球則相當於質點)。

令Z表任意選取的缸子內的球數，由上面的假定，Z是二項分配，其參數為$1/N$，因此

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$$

假設準備有很多的熔融玻璃，事實上，設有M個單位，而每個單位100公斤，故$N=100M$，$n=xM$，令$\alpha=x/100$，亦即每個瓶子含有此種質點的比例。於是$N=n/\alpha$，而上面的機率可改寫為

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$$

於是，當製造繼續進行(亦即$M\to\infty$，故$n\to\infty$)則

$$P(Z=k)\cong\frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}\qquad 其中\ \alpha=\frac{x}{100}$$

我們試算必須拋棄一個瓶子的機率，亦即等於$1-P(Z=0)$因此玻璃瓶的不良品率為$\cong 1-e^{-x/100}$。如果大量製造瓶子，我們可將玻璃的不良品的概率視為其相對頻率，因此不良品的比例約為$100(1-e^{-x/100})$，將其展開為馬氏級數，我們得到

$$100\left[1-\left(1-\frac{x}{100}+\frac{x^2}{2(100)^2}-\frac{x^3}{3!(100)^3}+\cdots\cdots\right)\right]$$

$$=x-\frac{x^2}{2(100)}+\frac{x^3}{6(100)^2}\cdots\cdots\cdots$$

如果x很小，被拋棄的瓶子的比例接近x，但若x很大，則就不能一概而論了。如果$x=100$，拋棄的瓶子的比例，亦即不良品率，不是100，而是$100(1-e^{-1})=63.23\%$，當然這是一個很極端的情況，通常是不會發生的。假設$x=30$，(比較實際)，則我們不是拋棄30%，而是只有$100(1-e^{-0.3})=25.92\%$。我們要注意，如果x是合理的大，比較經濟的方法，是製造較小的瓶子，例如，如果不需1公斤，只要0.25公斤的熔融玻璃，就可製造一個瓶子，則瓶子的不良率將由25.92%減為7.22%。

§8—3　卜氏過程　(The poisson Process)

上一節中，卜氏分配(Poisson)用來估計一已知的分配，亦即二項分配，然而，其本身就扮演著極重要的角色，因為它是個合適的機率模型可以描述許多可加以觀察的現象。

雖然對於我們所要討論的一些結果，我們並不準備很詳盡的導證，但是綜合

的探討太重要了，雖然我們不證明每一步驟，但了解其性質却是很重要的。

為了更詳盡解釋一些數學細節，我們要涉及一個特殊的例子，讓我們考慮一片放射 α 質點的放射性物質。令 X_t 代表一特定時間〔 0 ， t 〕內放射的質點數，我們將對（離散）隨機變數 X_t 做一些假定，這些假定將使我們能夠決定 X_t 的機率分配。

通常在推論數學結果時，我們必須接受某些的基本公設與公理。而在尋求公理以描述所觀察的現象時，某些公理可能比其他公理要較眞實些，亦即較不武斷。例如：在描述以一初速度向上拋擲的物體的運動時，我們可以假設其和地面的距離 s ，是時間 t 的二次函數，亦即 $s = at^2 + bt + c$ ，依經驗我們知道，這不是全靠直覺的。相反地，我們可假定加速度是個常數，由此而推斷 s 是 t 的二次函數。當然，我們為了建立數學模型，常不得不要做一些假定，這些假定愈是可行，我們愈是喜歡。

在為這放射問題建立機率模型時，我們也要有相同的觀點，上面定義的隨機變數 X_t 的值可為 0 ， 1 ， 2……令

$$p_n(t) = P\,[\,X_t = n\,]\ ,\ n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\cdots\cdots$$

我們下列三項假定

A_1 ：在沒有重覆的時間區間內，放射出的質點數是獨立隨機變數。

A_2 ：如果 X_t 如上定義，且 Y_t 為〔 t_1 ， $t_1 + t$ 〕時間內放射出的質點數，則對於任何 $t_1 > 0$ ，隨機變數 X_t 和 Y_t 有相同的機率分配。（換句話說，任何區間內放出的質點數的分配，只者區間長度有關，而與端點無關。）

A_3 ：若 $\triangle t$ 足夠小的話， $p_1(\triangle t)$ 接近於 $\lambda \triangle t$ ，其中 λ 為一大於 0 的常數。記為 $p_1(\triangle t) \rightarrow \lambda \triangle t$ 。本節中 $a(\triangle t) \sim b(\triangle t)$ 的意思是當 $\triangle t \rightarrow 0$ 時， $a(\triangle t)\,/\,b(\triangle t) \rightarrow 1$ 。此處， $\triangle t$ 仍然假設大於 0 。（這個假定 A_3 ，是說如果區間足夠小的話，則剛好得到一個質點的機率，恰與此區間的長度成正比）。

A_4 ： $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\triangle t) \sim 0$ （因而 $p_k(\triangle t) \sim 0$ ， $k \geq 2$ ），這意思是說，在某個足夠小的區間內，獲得兩個質點以上的機率是可忽略的。

A_5 ： $X_0 = 0$ ，亦即 $P_0(0) = 1$ ，這就是我們所描述的模型的原始條件（ initial condition ）。

正如我們所得簡略說明的，上列的五項假定，將使我們能夠導出 $p_n(t) = P\,[\,X_t = n\,]$ 。我們現在由上列的假定歸納一些結論。

(a)由 A_1 和 A_2 可以導出隨機變數 X_t 和〔 $X_{t+\triangle t} - X_t$ 〕為獨立隨機變立隨機變數，且有相同的機率分配。（見圖 8 － 1 ）

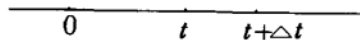


圖 8 － 1

(b)由 A_3 和 A_4，我們知道

$$p_o(\triangle t)=1-p_1(\triangle t)-\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\triangle t)\sim 1-\lambda\triangle t \qquad (8-2)$$

(c)我們可寫成

$$\begin{aligned} p_o(t+\triangle t) &= p[X_{t+\triangle t}=0] \\ &= P[X_t=0 \text{ and } (X_{t+\triangle t}-X_t)=0] \\ &= p_o(t)p_o(\triangle t) && \text{見結論(a)} \\ &\sim p_o(t)[1-\lambda\triangle t] && \text{(見8-2式)} \end{aligned}$$

(d)因此，我們得到

$$\frac{p_o(t+\triangle t)-p_o(t)}{\triangle t}\sim -\lambda p_o(t)$$

令 $\triangle t\to 0$，則上式左邊接近於 $p_o'(t)$，我們有

$$p_o'(t)=-\lambda p_o(t) \quad \text{或相當於} \quad \frac{p_o'(t)}{p_o(t)}=-\lambda$$

兩邊對 t 積分，則 $log\ p_o(t)=-\lambda t+c$，C 爲積分常數由 A_5，我們發現，由令 $t=0$，而 $C=0$，因此

$$p_o(t)=e^{-\lambda t} \qquad (8-3)$$

於是由假定，我們得到 $P[X_t=0]$，利用同一方法，我們得到 $p_n(t)$，$n\geq 1$。

(e)考慮 $p_n(t+\triangle t)=P[X_{t+\triangle t}=n]$

現在 $X_{t+\triangle t}=n$，若且唯若 $X_t=x$ 且 $[X_{t+\triangle t}-X_t]=n-x$，$x=0, 1, 2\cdots\cdots n$，利用 A_1 和 A_2 的假設，我們得到

$$\begin{aligned} p_n(t+\triangle t) &= \sum_{x=0}^{n} p_x(t)p_{n-x}(\triangle t) \\ &= \sum_{x=0}^{n-2} p_x(t)p_{n-x}(\triangle t)+p_{n-1}(\triangle t) \\ &\quad p_1(\triangle t)+p_n(t)p_o(\triangle t) \end{aligned}$$

由 A_3 和 A_4 及8－2式，我們得到

$$p_n(t+\triangle t)\sim p_{n-1}(t)\lambda\triangle t+p_n(t)[1-\lambda\triangle t]$$

因此

$$\frac{p_n(t+\triangle t)-p_n(t)}{\triangle t}\sim\lambda p_{n-1}(t)-\lambda p_n(t)$$

令 $\triangle t\to 0$

我們得到

$$p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t) \qquad n=1, 2\cdots\cdots$$

此乃無限的差微分方程組，讀者若有興趣可以證明，當我們定義函數 $q_n(t)$

$=e^{\lambda t}p_n t$，則上式成為$q'_n(t)=\lambda q_{n-1}(t)$，$n=1$，2……因為$p_0(t)=e^{-\lambda t}$，我們知道$q_0(t)=1$。〔同時注意，當$n>0$時$q_n(0)=0$〕，因此，我們可以求得

$$q'_1(t)=\lambda \qquad \text{因此}\quad q_1(t)=\lambda t$$

$$q'_2(t)=\lambda q_1(t)=\lambda^2 t \qquad \text{因此}\, q_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2}$$

一般而言$q'_n(t)=\lambda q_{n-1}(t)$，所以$q_n(t)=(\lambda t)^n/n!$

再由q_n的定義，最後得到

$$p_n(t)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \qquad n=0,1,2\cdots \qquad (8\text{–}4)$$

於是我們證得在$(0, t)$時區內從放射源射出的質點數，在上述的假定情況下，為一具參數(λt)之卜氏分配的隨機變數

【附註】 (a)我們要知道卜氏分配的產生，是我們先前所做假定的結果。也就是說當這些假定為有效時，（或者幾乎有效時），卜氏分配可以視為合宜的，有很多的現象，卜氏分配是適合的，例如：

(i)令X_t代表在時間長度t內，進入電信局總機交換的次數，上面的假定可以滿足，尤其是在一天最繁忙的時候，因此X_t是個卜氏分配。

(ii)令X_t代表由眞空管陰極射出的電子數，上面的諸假定也是合適的，因此X_t是個卜氏分配。

(iii)下面的例子（天文學）告訴我們說上面的例子不僅只用在某一段時間內，某事件發生的次數，而且可用於在某一體積或面積內，某一事件發生的次數。假定一天文學家研究銀河的某一部份，且此一部分星星分佈的密度是個常數λ，（亦即在體積V（立方單位）內，平均可發現入V個星星）。令X_V代表此部分銀河體積V的星星數目。如果上述的假定滿足，（將時間換為體積），則$P〔X_V=n〕=(\lambda V)^n e^{-\lambda V}/n!$（此假定，在本文中其實是說在不重覆的空間內出現的星星數目是個獨立隨機變數，而在一個很小範圍內出現一個星星以上的機率為0）。

(iv)另外一種應用來自生物學，令X_A表在顯微鏡下所看見的血液細胞數目，此地在顯微鏡下看得見的表面積為A個平方單位。

(b)常數λ在A_3假定時，原是個比例常數，下面有關λ的解釋值得注意，如果X_t代表在時間長度t的區間內某一事件發生的次數，則$E(X_t)=\lambda t$，因此$\lambda=E(X_t)/t$代表質點放射出的期望速率，如果X_V代表某特定體積V內某一事件發生的次數，則$E(X_V)=\lambda V$，因此$\lambda=E(X_V)/V$代表星星出現的期望密度。

(c)我們要注意的是在8－3節所討論的不僅是一個卜氏分配的隨機變數X。也可以說是，對任何$t>0$，我們發現X_t具有卜氏分配，

其參數依 t 而定，如此的一個隨機變數的（無限）集合稱之為卜氏分配過程（Poisson process）。也可以說，當在某一時間區間內有一事件發生，而 A_1 到 A_5 的假定均滿足，則我們就有了卜瓦松過程（Poisson process）。我們也同樣的可定義柏努利過程（Bernoulli process）為：如果 X_1，X_2……X_n……是在1，2……n，……次柏努利試驗中成功的次數，則隨機變數 X_1…X_n…的集合，稱為柏努利過程。

【例題8－5】 有一架複雜的機器，正常操作時，每小時能為公司賺 C 元（$C>2$），然而此機器有在意想不到的時刻發生故障之趨勢。假定在 t 小時內故障的次數，為具有參數 t 之卜氏分配的隨機變數。如果在 t 小時內發生 x 次故障，引起的損失（停工加上修理）為（X^2+X）元，因此在 t 小時內的總利潤為 $P=Ct-(X^2+X)$，此地 X 是個隨機變數，代表機器故障的次數。於是 P 是個隨機變數，且有趣的是如何選取 t（這兒我們可以自由選取），使得利潤為最大。於是

$$E(P)=Ct-E(X^2+X)$$

由定理8－1，我們發現 $E(X)=t$，且 $E(X^2)=t+(t)^2$ 因此 $E(P)=Ct-2t+t^2$，為找一個 t 使 $E(P)$ 最大，對 t 微分 $E(P)$，其結果令為0，則 $C-2-2t=0$

是故　$t=\frac{1}{2}(C-2)$　小時

【例題8－6】 令 X_t 為在時間長度 t 內由一放射物質放出的質點個數，假定 X_t 為卜氏分配，其參數是 αt，有一計數器用來計算射出的質點數目。假設任何放射出的質點，而沒有被數到的機率為一常數 p，如果 R_t 等於時間長度 t 內，計數器數出的質點數，求 R_t 的機率分配將如何？

對於已知的 $X_t=x$，隨機變數 R_t 為二項分配，此分配乃是基於 n 次重複，而其參數為（$1-P$），

亦即

$$P(R_t=k\mid X_t=x)=\binom{x}{k}(1-p)^k p^{x-k}$$

利用3－4式，我們得到

$$P(R_t=k)=\sum_{x=k}^{\infty}P(R_t=k\mid X_t=x)P(X_t=x)$$

$$=\sum_{x=k}^{\infty}\binom{x}{k}(1-p)^k p^{x-k}e^{-\alpha t}(\alpha t)^x/x!$$

$$=\left(\frac{1-p}{p}\right)^k\frac{e^{-\alpha t}}{k!}\sum_{x=k}^{\infty}\frac{1}{(x-k)!}(p\alpha t)^x$$

令 $i = x - k$ 則

$$P(R_t = k) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(p\alpha t)^{i+k}}{i!}$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} (p\alpha t)^k e^{p\alpha t}$$

$$= \frac{e^{-\alpha(1-p)t}\left[(1-p)\alpha t\right]^k}{k!}$$

因此 R_t 也是卜氏分配，但其參數為 $(1-p)\alpha t$

§8—4 幾何分配 (The Geometric Distribution)

假設我們做一實驗 ε；而只關心此事件之發生或是不發生，而且假定和討論二項分配時一樣，我們重複實驗 ε，且彼此均互不影響，而每一次 $P(A) = p$，$P(\overline{A}) = 1 - p = q$ 我們如果重複實驗 ε，直到 A 第一次發生（要分別清楚：二項分配中重複的次數是預先決定的，而此地它是個隨機變數）。

定義隨機變數 X 為 A 第一次發生所需的重複次數，因此 X 的可能值是 1，2 ……，因為 $X = k$，若且唯若前面 $(k-1)$ 次得到 $\overline{A}$，而第 k 次得到 A，則

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, 3 \qquad (8-5)$$

假若一隨機變數具有 (8－5) 的機率分配，則我們稱它具有幾何分配 (geometric distribution)

經由簡易的計算可知 (8－5) 是個合理的機率分配，顯然 $P(X = k) \geq 0$，而

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = p(1 + q + q^2 + \cdots\cdots) = p\left[\frac{1}{1-q}\right] = 1$$

X 的期望值是

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k$$

$$= p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{1}{p}$$

（因為級數對 $|q| < 1$ 收斂，因此我們可互換積分求和）。同樣我們可得到 $V(X) = q/p^2$，（我們將在第 10 章，利用不同的方法求得此兩個結果）我們可以歸納得下面的定理。

【定理**8－3**】 如果 X 為一幾何分配，如 (8－5) 式所給的條件，則 $E(X) = 1/p$，$V(X) = q/p^2$

【附註】 $E(X)$ 是 p 的倒數，這是很直覺的，因為 $p = P(A)$ 小的話，就需要很多次重複以使 A 發生。

【例題8－7】　假定進行一項實驗的費用爲$ 1000，若實驗失敗，則因爲在下次實驗前必須做某些改變，因此增加$ 300，如果任何一次實驗成功的機率均爲0.2，且若個別試驗互不影響。實驗繼續進行到獲得第一次成功爲止，求整個過程的期望費用爲多少？

如果C是費用，而X爲達成成功所需的試驗次數，則

$$C = 1000X + 300(X-1) = 1300X - 300$$

因此　$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300\dfrac{1}{0.2} - 300 = \$\,6200$

【例題8－8】　在某一地區，七月到八月任何一天有暴風雨的機率等於0.1。假定今天是否有暴風雨，與昨天沒有關係亦即它們是獨立互不影響的，求七月到八八月之間，第一次暴風雨發生在八月三日的機率爲何。

我們令X＝由七月一日開始，到第一次暴風雨的天數，而所要求的是$P(X=34)$，所以

$$P(X=34) = (0.9)^{33}(0.1) = 0.003$$

【例題8－9】　如果某一實驗，得到“正”的反應，其機率爲0.4，在得到第一次正反應前，求“負”反應少於5次的機率爲何？

令Y爲第一次正反應前的負反應次數，則

$$P(Y=k) = (0.6)^k(0.4) \qquad k=0,1,2\cdots\cdots$$

因此

$$P(Y<5) = \sum_{k=0}^{4}(0.6)^k(0.4) = 0.92$$

【附註】　如果X有如8－5式，所述的幾何分配，且令$Z=X-1$，則我們說Z爲第一次成功前，失敗的次數，我們得到$P(Z=k)=q^k p$，$k=0,1,2\cdots\cdots$此地p等於成功的機率，q爲失敗的機率，顯然$p+q=1$

幾何分配有個有趣的性質，敘述於下面的定理中。

【定理8－4】　若X有如(8－5)式的幾何分配，則對任意兩正整數s和t

$$P(X>s+t \mid X>s) = P(X\geq t) \qquad (8-6)$$

【證明】　見習題8－18

【附註】

(a)上面的定理告訴我們幾何分配是“沒有記憶”的，也就是說，假定事件A在前s次重複實驗中都沒有發生，則在接著的t次重複實驗也不會發生的機率，等於前面t次實驗沒有發生的機率。

(b)上面定理的逆敘述也成立，即如果對一個只有正整數值的隨機變數成立的話，則隨機變數一定有幾何分配(此地我們不加以證明，讀者可自行參考。

Feller's An Introductim to Probability Theory and Its Applications, John and Sons Inc, 2nd Edition, New

York, 1957, P. 304)

(c)下一章我們將注意的是有一個連續隨機變數，其分配有（8－6）式的特性，此分配即指數分配（exponential distribution）。

【例題8－10】 假定每晚檢查某機器看看是否仍可正常操作，令 p = 在任何一天失靈的機率。因此如果 X 表獲得首次失靈所須檢查次數，則 X 是個幾何分配，且 $P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$

此機率之最大值可如下求出

$$\frac{d}{dp}[P(X=n)]=0$$

此得 $p(n-1)(1-p)^{n-2}(-1)+(1-p)^{n-1}=0$

亦即 $(1-p)^{n-2}[(1-p)-(n-1)p]=0$

而得 $p=\frac{1}{n}$

§8－5 巴斯卡分配 (Pascal distribution)

如果我們求下面的問題，即可將幾何分配予以推廣實驗繼續進行到 A 發生第 r 次。且

$$P(A)=p \qquad P(A)=1-p=q$$

我們定義隨機變數 Y 為

Y 為使事件 A 恰好發生 r 次所需的重復試驗次數，我們要的是 Y 的機率分配，如果 $r=1$，則 Y 有（8－5）式的幾何分配。

現在 $Y=k$，若且唯若 A 發生在第 k 次重復試驗，而且前面（$k-1$）次重複試驗中，A 恰好發生了（$r-1$）次，因此此事件之機率為

$$p\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}$$

所以

$$p(Y=k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}q^{k-r} \qquad k=r, r+1 \ldots\ldots \tag{8-7}$$

如果 $r=1$，則上式即為（8－5）式，如果一隨機變數，具有（8－7）式的機率分配，稱之為巴斯卡分配（Pascal distribution）。

【附註】 上述的巴斯卡分配，通常也稱為負二項式分配（negative binomial distribution）。其理由為查驗

條件 $\sum_{k=r}^{\infty}P(Y=k)=1$ 時，

$$\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}=p^r\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}q^{k-r}$$

$$=p^r(1-q)^{-r}$$

其值顯然等於 1 。最後一個等式是由

$$(1-q)^{-r}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-r}{n}(-q)^n$$

的級數展開得來的。上式經過某種代數簡化和利用二項式係數的定義，我們可發現其等於 $\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}q^{k-r}$

因爲上式出現指數（$-r$），因此此分配被稱爲負二項式分配。要算$E(Y)$或$V(Y)$時，我們可以直接計算或者我們能夠如下進行。

令

$Z_1=A$第 1 次發生所需的重複次數。

$Z_2=A$第 1 次發生後至第二次發生時，所需的重複試驗次數：

⋮

⋮

$Z_r=A$第$r-1$發生後至第r次發生時，所需的重複試驗次數

於是我們知道Z_i，$i=1$，2……爲獨立隨機變數，且每一個均有幾何分配，又$Y=Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_r$因此利用定理 8－3 我們有下面的定理。

【定理**8－5**】　如果Y爲一巴斯卡分配，具有（8－7）式之條件，則

$$E(Y)=r/p \qquad V(Y)=rq/p^2 \qquad (8-8)$$

【例題**8－11**】　試驗成功的機率爲0.8，如果試驗一直到四次的成功爲止，求所需的重複試驗次數的期望值。

由上述，我們知道爲$4/0.8=5$

§8－6　二項分配和巴斯卡分配的關係
(Relationship between the Binomial and Pascal Distribution)

設X爲二項分配，其參數是n及p，（亦即X等於成功機率爲p的柏努利試驗中重複n次之成功的次數）。

令Y爲巴斯卡分配，其參數是r和p，（亦即，Y爲要得到r次成功而每次成功機率爲p時，所需的柏努利試驗的次數），則有下列的關係存在。

(a)　$P(Y\le n)=P(X\ge r)$

(b)　$P(Y>n)=P(X<r)$

【證明】

(a)如果前n次試驗中，成功的次數有r次以上，則要得到r次成功時，至多需要n次試驗。

(b)如果前 n 次試驗中，成功的次數少於 r 次，則要得到 r 次成功時，至少需要 n 次試驗。

【附註】

(a)上面的性質，使我們可以利用二項分配的函表，以計算和巴斯卡分配有關的機率，例如，假設我們要計算當成功的機率 $P=0.4$ 時，至少要十次的重複試驗才能獲得第三次成功的機率。

則

$$P(Y>10)=P(X<3)=\sum_{k=0}^{2}\binom{10}{k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$$

$$=0.678$$

（由附錄的附表中查出）

(b)讓我們區別二項分配和巴斯卡分配，每種情形，我們注意的是重複的柏努利試驗，當我們討論 n 次之重複試驗且觀察其成功的次數時，就產生二項分配。而當們事先已指定想要得到的成功次數時然後記錄所需要的柏努利試驗次數時，就產生了巴斯卡分配。

§8—7 超幾何分配 (Hypergeometric distribution)

假定 N 件物品中，r 件爲不良品，其餘 $N-r$ 件爲良品，我們由此 N 件物品中，隨機抽取 n 件（$n\leq N$），且不再放回，令 X 表發現的不良品件數。因爲若且唯若恰得到 k 件不良品（$n-k$）件爲良品，則 $X=k$

於是

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (8\text{–}9)$$

一離散隨機變數具有（8－9）式的機率分配時，我們說它爲一超幾何分配（Hypergeometric distribution）。

【附註】 因爲若 a，b 均爲非負整數，且 $b>a$，則 $\binom{a}{b}=0$ 所以對上面所有的 $k=0,1,2\cdots\cdots$ 而言，上面定義的機率均有意義。我們顯然無法獲得 r 件以上的不良品，對於此種事件（r 件以上的不良品）由（8－9）式規定其爲 0。

【例題 8－12】 一裝貨含 50 架小馬達。此一裝貨被接受前，有一檢驗員從中任選 5 架加以檢驗。如果都沒有不良品，此一裝貨就被接受，如果 1 架或 1 架以上的不良品被發現，則全部檢驗。假定事實上此裝貨中恰含 3 件壞馬達，問要全部檢驗的機率爲何？

如果我們令 X 是發現的不良品件數。若且唯若 $X\geq 1$，則需要全部檢驗，因

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}=0.28$$

【定理8－6】　令X有如（8．9）式的超幾何分配且令$p=r/N$，$q=1-p$，則對所有足夠大的N而言，下列均成立：

(a)　$E(X)=np$

(b)　$V(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$

(c)　$p(X=k)\simeq\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

【證明】　我們留給讀者自己證明。（見習題8．19）

【附註】　定理（8．6）之（C）說如果N足夠大，則X的分配可以二項式分配估計它。這是很直覺而合理的。因爲當我們每次抽取樣本再放回時，二項式分配是可行的（因爲這時候，獲取一壞件的機率保持不變）。而當我們每次抽取樣本不再放回時，超幾何分配是可行的。如果物品件數相當多，則抽取的物品有沒有再放回其產生的差異並不會很大。（C）部份只是此種事實的一項數學敍述。我們同時也注意到超幾何隨機變數X的期望值等於對應的二項分配之隨機變數的期望值。而X的變異數則有點小於二項分配的變異數。"修正項"$(N-n)/(N-1)$當N很大時，趨近於1。

我們可以以下面一個簡單的例子說明（C）的含義。假定我們要計算

$P(X=0)$

對於$n=1$，我們由超幾何分配求得$P(X=0)=(N-r)/N=1-r/N=q$，由二項分配，我們直接得到$P(X=0)=q$，因此當$n=1$時，兩者都是一樣。

對於$n=2$，我們由超幾何分配得到

$$P(X=0)=\frac{N-r}{N}\frac{N-r-1}{N-1}=\left(1-\frac{r}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{N-1}\right)$$

由二項分配我們得$P(X=0)=q^2$。要注意的是$1-\dfrac{r}{N}=q$，而$1-\dfrac{r}{(N-1)}$，則幾乎等於q。

通常如果$n/N\leq 0.1$，則以二項分配估計超幾何分配是很良好的。

§8－8　多項分配（multinomial distribution）

最後我們將考慮一個重要的高維離散隨機變數，它可視爲二項分配的推廣。考慮一個實驗 ε ，其樣本空間 S ，且將 S 分割爲 k 個互斥事件，A_1 ，……A_k（亦即當進行 ε 時，僅有一個 A_i 發生）。考慮 ε 的 n 個獨立重複。令 $p_i = P(A_i)$ 且設 p_i 在所有重複中均保持不變。顯然我們有 $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ 。我們定義隨機變數 X_1 ，……，X_k 爲

X_i 是 n 次重複中 A_i 發生的次數，$i = 1, 2, \ldots\ldots, k.$

這些 X_i 並非獨立隨機變數，因爲 $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$ ，因此只要任意（$k-1$）個隨機變數的值知道了，剩下的 1 個也就知道了。我們有下列的結果。

【定理 8－7】　如果 X_i ，$i = 1, 2, \ldots\ldots, k$ ，如上所定義。

則　$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_k = n_k) =$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots\cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots\cdots p_k^{n_k} \qquad (8-10)$$

這兒　$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

【證明】　證明跟二項機率一樣，我們只要知道安排 n 件物品的方式其中第一種 n_1 件，第二種 n_2 件，……，第 k 種 n_k 件的方法數是

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots\cdots n_k!}$$

【附註】　(a)如果 $k = 2$ ，則上面的結果就簡化爲二項分配。這時我們將兩種可能的結果，標爲"成功"與"失敗"。

(b)上面的分配稱爲多項機率分配（multinomial probability distribution）。二項分配的項可由 $[p+(1-p)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 的展開得到。同樣的，多項式分配可由 $(p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_k)^n$ 展開得到。

【定理 8－8】　假設（X_1 ，……，X_k）具有（8・10）式的多項式分配，

則　$E(X_i) = np_i$ ，$V(X_i) = np_i(1-p_i)$ ，

$i = 1, 2, \ldots\ldots, k$

【證明】　因爲每個 X_i 均有個二項式分配，其成功的機率（亦即 A_i 發生）等於 p_i 。

【例題 8－13】　製造某一特定長度的魚竿。假定其眞實長度是個均勻分配在〔10，12〕上的隨機變數 X 。假定我們只想知道下列三事件是否發生

$A_1 = \{X < 10.5\}$

$A_2 = \{10.5 \leq X \leq 11.8\}$

$A_3 = \{X > 11.8\}$

則

$p_1 = P(A_1) = 0.25$

$p_2 = P(A_2) = 0.65$

$p_3 = P(A_3) = 0.1$

於是如果製造 10 支這種魚竿，問恰有 5 支短於 10.5，恰有 2 支長於 11.8 的機率是

$$\frac{10!}{5!3!2!}(0.25)^5(0.65)^3(0.1)^2$$



8－1　如果 X 是卜氏分配，具參數 β，若 $P(X=0)=0.2$，試計算 $P(X>2)$。

8－2　如果 X 是卜氏分配，其參數為 λ，試定 k 值，使 $P(X=k)$ 為最大。〔提示：比較 $P(X=k)$ 和 $P(X=k-1)$〕。

8－3　（本題摘自 Probability and Statistical Inference for Enginecrs，作者為 Derman 及 Klein，出版者 Oxford University Press, London, 1959 年版），每天到達某一精煉油廠的油船數量為 N，N 呈卜氏分配（Poisson distribution），其參數 $\lambda = 2$，現在港口設備每天只能處理作業 3 艘油船。如果一天內超過 3 艘油船進口，則多出的必須到其他港口去，試求

(a)在某一天，必須將油船送到其他港口的機率為何？

(b)必須增加多少設備，才能使達到每天處理 90％的進口油船。

(c)每天油船進港的期望數量。

(d)每天到達港口的油船，最大可能數量為何？

(e)每天能被處理的油船數量期望值。

(f)每天被送到其他港口的油船數量之期望值。

8－4　假定一特殊機器生產的產品不良品機率為 0.2，如果我們隨機選取 10 件產品，問不良品不超過 1 件的機率為何？利用二項式分配及卜氏分配，並比較其結果。

8－5　一保險公司發現每年大約有 0.1％的人，發生某種意外事件，如果任意取 10,000 名投保者，問下一年度發生此種意外事件，不超過 5 人的機率為何？

8－6　假設 X 為卜氏分配，若 $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$ 試計算 $P(X=0)$ 和 $P(X=3)$。

8－7 一軟片廠商每年製造10卷特別感光的軟片，如果軟片一年內沒有售出完必須拋棄。過去的經驗顯示需求量D是卜氏分配之隨機變數其參數是 8，如果售出每卷賺\$ 7，而拋棄則賠\$ 3，試求廠商對其10卷軟片的期望利潤？

8－8 一放射性物質放射質點，假設在一小時內放出質點個數爲卜氏分配其參數等於λ，計數器用以計錄放出的質點個數，如果任意一小時內超過30個質點放射出，則計數器無法計錄超出的質點，而只能記爲30。如果Y是隨機變數定義爲計數器記錄的質點個數，試求Y的機率分配。

8－9 假定一放射性物質放射質點，且設在一小時內放出質點個數爲卜氏分配其參數等於λ，又設用以記錄這些放出質點的計數器隨時會疏忽而沒有記錄放出的質點。因此假設放出質點被記錄的機率等於p。

(a) 如果Y表記錄所得的質點個數，則Y的機率分配爲何？

(b) 如果$\lambda=4$，$p=0.4$，求$P(Y=0)$之值。

8－10 假定一容器含1000個質點，質點由容器逃掉的機率等於0.0004，問5個以上質點逃掉的機率爲何？（可以假定質點之逃掉與其他質點無關）。

8－11 假定有一585頁的書含43個印刷上的錯誤。如果這些錯誤隨機分配全書，試問隨機選取10頁均沒有錯誤的機率爲何？

（提示：假定X＝每頁錯誤個數爲卜氏分配）。

8－12 在每區間爲10秒的7個區間裏，觀察一放射性物質。假定每一區間內放出質點數X爲參數5的卜氏分配。（亦即，質點放出的速率爲每秒0.5個）

(a) 在每一區間裏，都有4個以上質點放出的機率爲何？

(b) 至少有一區間有4個以上質點放出的機率爲何？

8－13 一電算機在任何一小時內晶體管壞掉的個數可視爲參數是0.1之卜氏隨機變數（亦即平均每10小時，有一晶體管壞掉），現在有某一計算需要20小時。

(a) 試求上面的計算能連續完成而沒有一次故障的機率？（假定電算機只當3個或3個以上晶體管壞掉時，才不能操作）。

(b) 如同(a)，但是電算機若有2個或2個以上晶體管壞掉時，才不能操作。

8－14 在形成n位的二進位數字時（如：01100100 0100……0），任一位數出錯的機率是0.002。如果位數的出錯是互不影響的話，問在一個25位的二進位數中發現0，1或1個以上錯誤的機率？如果計算機每秒鐘形成10^6個這種25位的二進位數字，問在任何一秒鐘內出現一個錯誤的數的機率爲何？

8－15 兩種互不影響的操作程序每週被用以發射火箭。假定每種程序繼續進

行直到發射成功。假設利用程序 I 發射成功的機率 $P(S)=p_1$，程序 II 則為 $P(S)=p_2$。更假定每週兩種程序均被使用一次。令 X_1 和 X_2 分別代表利用 I 和 II 發射成功所需的週數。（因此 X_1 和 X_2 是獨立隨機變數，每個均有幾何分配），令 W 為 $\min(X_1, X_2)$，$Z=\max(X_1, X_2)$，因此 W 代表發射成功所需數，Z 則代表兩種程序都發射成功所需週數，（於是如果程序 I 得到 $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$，程序 II 得到 $\bar{S}\bar{S}S$，我們有 $W=3$，$Z=4$）。

(a) 試求 W 的機率分配。〔提示：利用 X_1 和 X_2 表出事件 $\{W=k\}$〕

(b) 試求 Z 的機率分配。

(c) 如果 $p_1=p_2$，重求(a)和(b)。

8－16　4 件零件被裝置到一架儀器上。4 件零件的電源是互不影響的且第 i 件零件壞掉的機率等於 p_i，$i=1, 2, 3, 4$

(a) 問此儀器可操作的機率為何？

(b) 問至少有 3 件零件在操作的機率為何？

(c) 如果 $p_1=p_2=0.1$，$p_3=p_4=0.2$，試求恰有 2 件零件在操作的機率為何？

8－17　有一機械師擁有許多墊圈，其中大約 50％直徑是 $\frac{1}{4}$ 吋，30％是 $\frac{1}{8}$ 吋，其餘 20％是 $\frac{3}{8}$ 吋。假設隨機選取 10 個墊圈。

(a) 恰有 5 個 $\frac{1}{4}$ 吋，4 個 $\frac{1}{8}$ 吋，1 個 $\frac{3}{8}$ 吋的機率。

(b) 只選中其中兩種的機率為何？

(c) 三種均被選中的機率為何？

(d) 一種 3 個，另一種 3 個而第三種 4 個的機率為何？

8－18　證明定理 8．4．

8－19　證明定理 8．6．

8－20　在某一特定時間內由一放射性物質放出的質點個數是卜氏隨機變數。如果沒有放射出質點的機率等於 1／3，問放射出 2 或 2 個以上的質點的機率為何？

8－21　假設 X_t 是 t 小時內由一放射性物質放出的質點數，它是參數是 $20t$ 的卜氏分配。問 15 分內恰有 5 個質點放出的機率為何？

8－22　火箭發射成功的機率等於 0.8，假設發射試驗繼續到有三次發射成功為止，問需要試驗 6 次的機率？少於 6 次的機率？

8－23　如習題 8．22 敘述的情況。假設發射試驗繼續到有連續三次發射成功，在此情況下，回答問題。

8－24 再考慮習題8．22的情況。假設每次試驗要花用＄5000，另外，發射失敗要多花用＄500，試求在所敘述的情況下所需要的期望費用。

8－25 令X和Y如8．6節所定義，證明或反駁。

$$P(Y<n)=P(X>r)$$



8－1

解：$P(X=0)=e^{-\beta}=0.2$

$$\therefore \beta=-\ln 0.2=1.61$$

$$P(X=1)=e^{-\beta}\cdot\beta=0.2\times 1.61=0.322$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-\beta}\cdot\beta^2}{2}=\frac{(0.2)^2(1.61)^2}{2}=0.259$$

$$\begin{aligned}P(X>2)&=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]\\&=1-(0.2+0.322+0.259)\\&=0.219\end{aligned}$$

8－2

解：

$$P(X=k-1)=\frac{C^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\begin{aligned}P(X=k)&=\frac{C^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}=\frac{C^{-\lambda}\lambda^{k-1}\lambda}{k(k-1)!}\\&=\frac{\lambda}{k}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{\lambda}{k}\cdot P(X=k-1)\end{aligned}$$

同理$P(X=k+1)=\dfrac{\lambda}{k+1}\cdot P(X=k)$

因$P(X=k)$為極大值

故 $\dfrac{\lambda}{k+1}\leq 1\leq\dfrac{\lambda}{k}$

(1) 若λ為整數

則$k\leq\lambda\leq k+1$

$\therefore \lambda-1\leq k\leq\lambda$

故$k=\lambda$ or $k=\lambda-1$

(2)若λ不為整數

則$\dfrac{1}{k+1}<1<\dfrac{\lambda}{k}$

8－3

解：　(a)$P(N>3)=1-P(N\leq 3)$

$$=1-\sum_{k=1}^{3}\frac{e^{-2}\,2^{k}}{k\,!}$$

$$=1-\left[e^{-2}+e^{-2}\cdot 2+\frac{e^{-2}\cdot 2^{2}}{2}+\frac{e^{-2}\cdot 2^{3}}{3\,!}\right]$$

$$=1-e^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}\right)$$

$$=1-0.135\times 6.33$$

$$=1-0.85455$$

$$=0.14545$$

(b)假定每日處理的能力增加至 k 桶，所求的條件即爲

$$P(N\leq k)>0.9$$

$$\sum_{k=0}^{k}\frac{e^{-2}\,2^{k}}{k\,!}>0.9$$

$$e^{-2}\sum_{k=0}^{k}\frac{2^{k}}{k\,!}>0.9$$

$$\sum_{k=0}^{k}\frac{2^{k}}{k\,!}>\frac{0.9}{0.135}=6.66$$

$$\therefore k=4$$

(c)$E(N)=\lambda=2$

(d)因 $\lambda=2$，由前題知每天送達的桶數最可能的數目爲

$N=2$　　or　　$N=1$

(e)$P(X=1)=2\times e^{-2}=0.27$

$P(X=2)=2\times e^{-2}=0.27$

$P(X=0)=e^{-2}=0.135$

$P(X\geq 3)=1-0.27-0.27-0.135=0.325$

令 Y 表每天處理的桶數，則其期望值爲

$$E(Y)=0\times 0.135+1\times 0.27+2\times 0.27+3\times 0.325$$

$$=0.27+0.54+0.925$$

$$=1.785$$

(f)令 N 表每天送達的桶數，Y 表每天處理的桶數，Z 表每天送走的桶數。

$$N=Y+Z$$

$$E(Z)=E(N)-E(Y)$$

$$=2-1.785$$

$$=0.215$$

解： 由二項分配

令 X 表 defective 的數目

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=(0.8)^{10}+\binom{10}{1}(0.8)^{9}(0.2)$$
$$=(0.8)^{10}+10(0.8)^{9}(0.2)$$
$$=0.3758$$

又若令 $\alpha=n\cdot p=10\times 0.2=2$

則 X 可表為參數 2 的卜氏分配

$$P(X\leq 1)=\sum_{k=0}^{1}\frac{e^{-2}\cdot 2^{k}}{k!}=e^{-2}+e^{-2}\times 2$$
$$=3\times 0.135=0.405$$

8－5

解： 遭遇意外的概率 $P=0.001$

$n=10{,}000$ ， 令 $\alpha=n\cdot p=10{,}000\times 0.001=10$

令 X 表遭遇意外的客戶數，

則 X 可表為參數 $\alpha=10$ 的卜氏分配。

$$\therefore P(X\leq 5)=\sum_{k=0}^{5}\frac{e^{-10}\cdot 10^{k}}{k!}$$
$$=e^{-10}\left[1+10+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\frac{10^4}{4!}+\frac{10^5}{5!}\right]$$
$$=4.5\times 10^{-5}\left(1+10+\frac{10^2}{2}+\frac{10^3}{6}+\frac{10^4}{24}+\frac{10^5}{120}\right]$$
$$=0.000045+0.00045+0.0025+0.0077$$
$$+0.01875+0.0375$$
$$=0.06695$$

8－6

解： 因 $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$

$$\therefore\frac{e^{-\alpha}\alpha^{2}}{2}=\frac{2}{3}e^{-\alpha}\alpha \qquad \therefore\alpha=\frac{4}{3}$$

故 $P(X=0)=e^{-\alpha}=e^{-\frac{4}{3}}=0.264$

$$P(X=3)=\frac{e^{-\alpha}\cdot\alpha^{3}}{3!}=\frac{0.264\times(1.33)^{3}}{6}$$
$$=0.1056$$

8－7

令Y表獲利，則$Y=70$　　若$D\geq 10$

$=7D-3(10-D)$

$=10D-30$　　若$D<10$

因D呈卜氏分配

$$P(D=k)=\frac{e^{-8}\cdot 8^k}{k!}$$

$Y=-30$	$P(D=0)=0.0003$
$Y=-20$	$P(D=1)=0.0027$
$Y=-10$	$P(D=2)=0.0107$
$Y=0$	$P(D=3)=0.0286$
$Y=10$	$P(D=4)=0.0573$
$Y=20$	$P(D=5)=0.0916$
$Y=30$	$P(D=6)=0.1221$
$Y=40$	$P(D=7)=0.1396$
$Y=50$	$P(D=8)=0.1396$
$Y=60$	$P(D=9)=0.1241$
$Y=70$	$P(D\geq 10)=0.2834$

$$\therefore E(Y)=\Sigma Y_k P(D=k)$$
$$=(-30)0.0003+(-20)\times 0.0027+(-10)\times 0.0107+10\times 0.0573+20\times 0.0916+30\times 0.1221+40\times 0.1396+50\times 0.1396+60\times 0.1241+70\times 0.2834=45.726$$

8－8

解：　令X表放射源放出的粒子數。

則若$X<30$，則$Y=X$，而Y亦呈卜氏分配

若$X\geq 30$，則$Y=30$

$$P(Y=30)=P(X>30)=\sum_{k=30}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!}$$

故Y的機率分配

$$為P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\qquad k<30$$

$$P(Y=30)=\sum_{k=30}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

8－9

解：　(a)由例題8－6知Y的機率分配呈一卜氏分配而參數為$p\lambda$。

$$\therefore P(Y=k)=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

(b) $\lambda = 4$, $p = 0.9$

$\therefore P(Y=0) = e^{-p\lambda} = e^{-3.6} = 0.027$

8－10

解： $n = 10{,}000$ $p = 0.0004$

令 $\alpha = n \cdot p = 100000 \times 0.0004 = 4$

令 X 表逸出的粒子數

則 X 可表爲參數 $\alpha = 4$ 的卜氏分配

$$\therefore P(X \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-4} \cdot 4^k}{k!}$$

$$= 1 - e^{-4}\left[1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{24} + \frac{4^5}{120}\right]$$

$$= 1 - 0.0182 \times 42.86$$

$$= 0.22$$

8－11

解： 令 X 表每一頁內錯誤的個數

因對任一錯誤而言，出現在某一頁的概率爲 $\frac{1}{585}$

$$故 P(X=k) = \binom{43}{k}\left(\frac{1}{585}\right)^k\left(1-\frac{1}{585}\right)^{43-k}$$

$$= \binom{43}{k}\left(\frac{1}{585}\right)^k\left(\frac{584}{585}\right)^{43-k}$$

若令 $\alpha = n \cdot p = 43 \cdot \frac{1}{585} = \frac{43}{585}$

則 X 可表爲參數 $\alpha = \frac{43}{585}$ 的卜氏分配

$$P(X=k) \approx \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^k}{k!}$$

則某一頁沒有錯誤的概率爲

$$P(X=0) = e^{-\alpha}$$

$$= e^{-\frac{43}{585}}$$

因對每一頁而言，沒有錯誤的概率均相同，故任取10頁均無錯誤的概率爲

$$\left(e^{-\frac{43}{585}}\right)^{10} = e^{-\frac{430}{585}} = 0.478$$

8－12

解： (a)令 X 表每一個 *interval* 內放射的粒子數，X 呈卜氏分配

$$P(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-5} 5^k}{k!}$$

$$= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{6}\right)$$

$$= 1 - 6.7 \times 10^{-3} \times 39.3$$

$$= 1 - 0.265 = 0.735$$

故 7 個 *interval's* 內每一 *interval* 放射的粒子數均大於或等於 4 的概率為 (0.735)

(b) $P(X < 4) = 0.265$

則每一 *interval* 放射的粒子數均少於 4 的概率為 (0.265) 故至少有一個 *interval* 放射的粒子數多於或等於 4 的概率為 $1-(0.265)^7$

8 – 13

解：(a)令 X 表 20 小時之期間內電晶體壞了的數目，則 X 呈卜氏分配，$\lambda = 0.1$

參數 $\alpha = \lambda t$

$$= 0.1 \times 2.0 = 2$$

$$P(X < 3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!}$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2}\right) = 0.135 \times 5$$

$$= 0.075$$

故機器能正常工作的概率為 0.675

(b) $$P(X < 2) = \sum_{k=1}^{1} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} = e^{-2} + 2 \cdot e^{-2}$$

$$= 3 \times 0.135 = 0.405$$

8 – 14

解：(a)令 X 表錯誤的 *digit* 的數目

X 為二項分配

$P(X=0) = (1-0.002)^{25}$

$P(X=1) = 25 \times 0.002 \times (1-0.002)^{24}$

$P(X>1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$\qquad = 1-(1-0.002)^{25} - 0.05(1-0.002)^{24}$

若令 $\alpha = n \cdot p$

$\qquad = 25 \times 0.002 = 0.05$

則 X 可表為參數 $\alpha = 0.05$ 的卜氏分配

$P(X=0) = e^{-\alpha} = e^{-0.05} = 0.9512$

$P(X=1) = \alpha e^{-\alpha} = 0.05 \times e^{-0.05} = 0.04756$

$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$
$=1-0.9512-0.04756$
$=0.00124$

(b)令 Y 表 1 秒內錯誤的 $digit$ 的數目

令 $\beta=n\cdot p$
$=25\times 10^6\times 0.002=5\times 10^4$

則 Y 爲參數 $\beta=5\times 10^4$ 的卜氏分配

$P(Y=1)=5\times 10^4\ e^{-5\times 10^4}$

8－15

解：(a)因 $W=minimum\ (X_1, X_2)$

事件 $\{W=k\}=\{X_1=k, X_2\geq k\ \ or\ \ X\geq k, X_2=k\}$

$P\{W=k\}=p\{X_1=k, X_2\geq k\}+p\{X_1\geq k, X_2=k\}$
$-p\{X_1=k, X_2=k\}$

因 X_1，X_2 均爲幾何分配，且互爲獨立。

$\therefore P\{W=k\}=p\{X_1=k\}\cdot p\{X_2\geq k\}+p\{X_1\geq k\}$
$\cdot p\{X_2=k\}-p\{X_1=k\}\cdot p\{X_2=k\}$

$$=[(1-p_1)^{k-1}p_1][1-\sum_{j=1}^{k-1}(1-p_2)^{j-1}\cdot p_2]$$

$$+[(1-p_2)^{k-1}\cdot p_2][1-\sum_{j=1}^{k-1}(1-p_2)^{j-1}p_1]$$

$$-p_1p_2(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

(b)因 $Z=maximum\ (X_1, X_2)$

事件 $\{Z=k\}=\{X_1=k, X_2\leq k\ \ or\ \ X_1\leq k, X_2=k\}$

$\therefore P\{Z=k\}=p\{X_1=k, X_2\leq k\}+p\{X_1\leq k, X_2=k\}$
$-p\{X_1=k\}\ p\{X_2=k\}$

$$=[(1-p_1)^{k-1}p_1]\sum_{j=1}^{k}(1-p_2)^{j-1}p_2$$

$$+[(1-p_2)^{k-1}p_2]\sum_{j=1}^{k}(1-p_1)^{j-1}p_1$$

$$-p_1p_2(1-p_1)^{k-1}(1-p_2)^{k-1}$$

(c)若 $p_1=p_2=p$

$$則P\{W=k\}=2p(1-p)^{k-1}[1-\sum_{j=1}^{k-1}(1-p)^{j-1}p]$$

$$-p^2(1-p)^{2(k-1)}$$

$$P\{Z=k\}=2p^2(1-p)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}-p^2(1-p)^{2(k-1)}$$

8－16

解：(a)事件E：*entire apparatus is fanction*

$P(E)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$

(b)事件E：至少3個元件工作正常

$P(E)=p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)+(1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)+(1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4)+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$

(c)事件E：恰有2個元件工作正常

$P(E)=p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)+p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)+p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4+(1-p_1)p_2p_3(1-p_4)+(1-p_1)(1-p_2)p_3p_4+(1-p_1)p_2(1-p_3)p_4$

$=0.1\times0.1\times0.8\times0.8+0.1\times0.9\times0.2\times0.8+0.1\times0.9\times0.8\times0.2+0.9\times0.1\times0.2\times0.8+0.9\times0.9\times0.2\times0.2+0.9\times0.1\times0.8\times0.2$

$=0.0964$

8－17

解：令X_1表$\frac{1}{4}$ *lnch* 的皮圈被選取的數目

令X_2表$\frac{1}{8}$ *inch* 的皮圈被選取的數目

令X_3表$\frac{3}{8}$ *inch* 的皮圈被選取的數目

(a)$P(X_1=5, X_2=4, X_3=1)=\dfrac{10!}{5!4!1!}(0.5)^5(0.3)^4(0.2)$

$=0.064$

(b)$P=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{10!}{k!(10-k!)}[(0.5)^k(0.3)^{10-k}+(0.5)^k(0.2)^{10-k}+(0.3)^k(0.2)^{10-k}]$

(c)因抽樣中包含三種皮圈，故可取三個皮圈分別爲$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}$ *inch* 直徑，而其餘7個則可任意選取

故$P=\dfrac{3!}{1!1!1!}(0.5)(0.3)(0.2)\times1$

$= 6 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.2$

$= 0.18$

(d)令事件 A_1 : $\{X_1 = 3, X_2 = 3, X_3 = 4\}$

A_2 : $\{X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 3\}$

A_3 : $\{X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 3\}$

$$P(A_1) = \frac{10!}{3!3!4!}(0.5)^3(0.3)^3(0.2)^4$$

$$P(A_2) = \frac{10!}{3!3!4!}(0.5)^3(0.4)^4(0.2)^3$$

$$P(A_3) = \frac{10!}{3!3!4!}(0.5)^4(0.3)^3(0.2)^3$$

則 $P = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ 〔因 A_1, A_2, A_3 爲互斥〕

$$= \frac{10!}{3!3!4!}[(0.5)^3(0.3)^3(0.2)^4 + (0.5)^3(0.3)^4(0.2)^3 + (0.5)^4(0.3)^3(0.2)^3]$$

8－18

解： $P(X = k) = q^{k-1}p$

$X = k$ 表第 k 次時才成功

$X > s$ 表前 s 次均未成功

故 $P(X > s) = q^s$

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t \cap X > s)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{q^{s+t}}{q^s} = q^t = P(X > t)$$

8－19

解： $$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-r}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

(a) $$E(X) = \sum_{x=0}^{n} k \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=1}^{n} \frac{r!}{(k-1)!(r-k)!} \frac{\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$=\frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{x=1}^{n}\frac{(r-1)!}{(k-1)!(r-k)!}\binom{N-r}{n-k}$$

$$=\frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{m}\binom{r-1}{y}\binom{N-r}{m-y}\qquad 令\ y=x-1,\ m=n-1$$

$$=\frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{m}=\frac{r}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$=\frac{nr}{N}=np$$

(b) $E(X(x-1))=\dfrac{r(r-1)n(n-1)}{N(N-1)}$

$$V(X)=E(X(x-1)+E(X)-\mu^2$$

$$=\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}=npq\frac{N-n}{N-1}$$

(c)顯然成立，證明省略。

8－20

解： 令X表放射的粒子數，X呈卜氏分配。

$$P(X=0)=e^{-\alpha}=\frac{1}{3}\qquad \therefore \alpha=\ln 3$$

$$P(X=1)=\alpha e^{-\alpha}$$

$$=\frac{1}{3}\ln 3$$

$$P(X\geq 2)=1-p(X=0)-p(X=1)$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln 3$$

$$=\frac{1}{3}(2-\ln 3)$$

8－21

解： $\alpha=\lambda t$

$$=20\times\frac{1}{4}=5$$

$$P(X=5)=\frac{e^{-5}\cdot 5^5}{5!}=\frac{6.8\times 10^{-3}\times 5^5}{120}$$

$$=0.177$$

8－22

解： (a)令X表 *number of launching to have 3 successful launchings*

發射成功的概率 $p = 0.8$

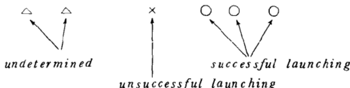
X呈巴斯卡分配

$P(X=6) = \binom{5}{2}(0.8)^3(0.2)^3 = 4.1 \times 10^{-2}$

(b) $P(X=6) = \sum_{k=3}^{5} \binom{k-1}{2}(0.8)^3(0.2)^{k-3}$

8－23

解： (a)令X表 *number of launching needed to have 3 consecutive successful launching*



$\therefore P(X=6) = p^3 q \sum_{k=0}^{2} p^k q^{2-k}$

$= \sum_{k=0}^{2} p^{3+k} q^{3-k}$

$p = 0.8$ ， $q = 0.2$

$\therefore P(X=6) = (0.8)^3(0.2)^3 + (0.8)^4(0.2)^2 + (0.8)^5(0.2)$

(b) *If fewer than 6 attamps is needed there are 4 case*

$P(X<6) = (0.8)^3 + (0.2)\times(0.8)^3 + (0.2)\times(0.8)^4 + (0.2)^2\times(0.8)^3$

8－24

解： $P(X=k) = \binom{k-1}{2}(0.8)^3(0.2)^{k-3}$

令Y表 *cost*

$Y = 5000X + 500(X-3)$

因X為－ *pascal* 分配

$\therefore E(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.8} = 3.75$

$E(Y) = 5000E(X) + 500E(X) - 1500 = 19125$

8－25

解： X為二項分配參數，$n\ p$（即X為在n次試驗中成功的次數），Y為巴斯

卡分配參數 r p（即欲獲得 r 次的成功須試驗的次數）。
則 $P(X>r)$ 表在 n 次的實驗中成功的次數多於 r 次，故若僅欲將得到 r 次的結果即可，則實驗的次數不須 n 次，故 $P(r<n)$。
所以得證 $P(X>r)=P(r<n)$

第九章　幾種重要的連續隨機變數

§9—1　導論 (Introduction)

本章吾人將詳細的來探討數種連續隨機變數及其特性。如同前述所言，假如吾人將一隨機X的值域（ range space ）作個理想的設定，所有可能出現的實數（如在某特定區間或數間的集合），則在許多問題上將可獲得相當的簡化。如此，吾人因而導出了連續性隨機變數，現在吾人先介紹數種隨機變數的重要應用，，至於這些應用的討論則留待下章。

§9—2　常態分配 (Normal Distribution)

在統計學的領域中，常態分配爲最重要的連續隨機變數之一。

【定義】 具有平均數μ與變異數σ^2之隨機變數X的機率密度函數（ pdf ）爲

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right),\ -\infty<x<\infty \qquad (9-1)$$

其中$\pi=3.1459\cdots\cdots$，$-\infty<\mu<\infty$，$\sigma>0$,通常以N（ μ，σ^2 ）表示之。

§9—3　常態分配的性質 (Properties of the Normal Distribution)

(a)若f爲一合乎標準的pdf。除顯然地$f(x)\geq 0$外，且必須校核

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

假如令$t=\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$,則吾人可將$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 寫成$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$=I$ 運用微積分的技巧以I^2 代I 得

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s^2+t^2)}{2}}ds\ dt.$$

考慮極座標,令$S=\gamma\ cus\ \alpha$，$t=\gamma\ sin\ \alpha$

則　$ds\ dt=\gamma d\gamma\ \ d\alpha$，而

因$-\infty<s$，$t<\infty$　知$0<\gamma<\infty$，$0<\alpha<2\pi$

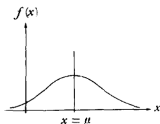
得　$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}dr\ d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -e^{\frac{-r^2}{2}}\Big|_0^{\infty}\ d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} d\alpha$$

$$= 1$$

所以 $I = 1$ 得證。



(b) f 圖曲線的特性有

①外表為鐘型分配。

②曲線 f 以 $x = \mu$ 為對稱。

③曲線位於 $x = \mu \pm \sigma$ 處有二反曲點（ inflection ），當 $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ 時曲線向下彎，否則向上彎。

④當 $x \to \pm\infty$，則 $f(x) \to 0$ ，即曲線以橫軸為漸近線（ asymptotically）

(c)母數 μ ，$\bar{\sigma}$ 大小與常態變數的機率分配的關係，及其在幾何上的意義。

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x \ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx$$

令　$z = \dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$　知　$dx = \sigma\, dz$

得　$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= \frac{}{\sqrt{2\pi}}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz + \mu \frac{}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz$$

上式的第一個積分因其為奇函數（ odd function ）的積分所以為零，第二個積分由常態分配式知 $E(x) = \mu$ 。

其次　$$E(X)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx$$

再令　$z = \dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$

$$\text{得}E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)^2\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + 2\mu\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \mu^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

第二個亦為零，第三個積分由上知等於 μ^2 。第一個積分用分部積分法（ integrate by parts ）令 $dv = ze^{-\frac{z^2}{2}}$ ，$\mu = z$ 知 $v = -e^{-\frac{z^2}{2}}$ ，$dz = dv$ 所以得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{-2e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$= 0 + 1 = 1$$

代入上式得

$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$，因此$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$

由此吾人可分別求出決定常態分配特性的母數μ，σ^2。所以假設已知X常態分配，則吾人僅知其機率分配屬於某一型式（族 *family*）；若又知其$E(x)$與$V(x)$，則X的分配才完全被定位。

如圖9－2爲兩平均數相等，標準差不等的常態曲線$N(\mu, \sigma_1^2)$與$N(\mu, \sigma_2^2)$，若$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$則其pdf的形態將如9－2而有高低寬廣之別。

(b)若X的分配爲$N(0.1)$ 則稱X爲標準常態分配（standardized normal distribution）其pdf爲

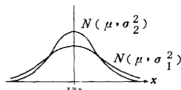


圖9－2

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (9-2)$$

因標準常態曲線已被編成表格，所以更加形成其重要性。

【定理9－1】 若$Y = aX + b$，而X的分配爲$N(\mu, \sigma^2)$ 則Y的分配爲$(N(a\mu+b, a^2\sigma^2))$。

【證明】 由第七章知$E(Y) = a\mu + b$，$V(Y) = a^2\sigma^2$

利用定理（5－1）可證明Y亦爲常態分配。且由a的正負關係可以定出$aX+b$爲增或減函數。所以若g爲Y的pdf，則

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{y-b}{\sigma} - \mu\right]^2\right) \left|\frac{1}{\sigma}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 a^2}[y - (\sigma\mu + b)]^2\right)$$

這表隨機變數之pdf的分配爲$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

【註】 設X的分配爲$N(\mu, \sigma^2)$，若$Y = \dfrac{(X-\mu)}{\sigma}$

則Y的分配爲$N(0.1)$。

【證明】 因Y爲X的線性函數，所以引用9－1定理即可得證。本推論可使變數經此轉換而呈標準常態分配。

§9－4 常態分配表

設X爲$N(0，1)$的分配

則$P(a \leq X \leq b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

這積分式無法以普通的方法求出，因爲沒有基本的微積分定理可以解出一函數使其導數等於$e^{-\frac{x2}{2}}$。

然而，吾人已運用數字的積分法將其一一分別求出，而以$P(X \leq s)$的型式列成一表。

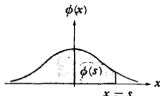
Φ表標準常態分配的cdf。

即　　$$\text{即}\Phi(S)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (9-3)$$

參圖（9－3），函數Φ已經廣泛的製成表格，並且本書也摘錄一表置於附錄內備查。如X爲$N(0，1)$的分配若欲求$P(a \leq X \leq b)$的機率，因

$p(a \leq X \leq b)=\Phi(b)-\Phi(a)$

所以由函數Φ的表即可查得。



若X爲$N(\mu，\sigma^2)$的任一常態分配，只要將其標準化亦可由Φ函數表查得其機率。

因由定理（9－1）知若X爲$N(\mu，\sigma^2)$的分配。

則　$Y=\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ 的分配爲$N(0，1)$

$$\text{所以}\quad P(a \leq X \leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad (9-4)$$

由Φ的定義亦可知

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x) \qquad (9-5)$$

這一個關係在查表時甚爲有用。

如X爲$N(\mu，\sigma^2)$之分配，若欲求$P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma)$。

則上述機率可以Φ函數表示如下

$$P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma)=P\left(-k \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq k\right)$$

$$=\Phi(k)-\Phi(-k)$$

由式（9－5），可得$k>0$

$$\text{即}\quad P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma)=2\Phi(k)-1 \qquad (9-6)$$

注意上式機率大小和μ，σ值無關，換句話說，$N(\mu, \sigma^2)$分配的隨機變數在k倍標準差（standard deviation）內的機率只和k值大小有關。

【例題9－1】 設X的分配爲$N(3, 4)$，求－C值使得$P(X>C)=2P(X\leq C)$

因$\frac{(X-3)}{2}$的分配爲$N(0, 1)$。所以

$$P(X>C)=P(\frac{X-3}{2}>\frac{C-3}{2})=1-\Phi(\frac{C-3}{2})$$

即 $$P(X\leq C)=P(\frac{X-3}{2}\leq\frac{C-3}{2})=\Phi(\frac{C-3}{2})$$

代入題目即可寫爲

$$1-\Phi[\frac{(C-3)}{2}]=2\Phi[\frac{(C-3)}{2}]$$

所以$\Phi[\frac{(C-3)}{2}]=\frac{1}{3}$ ，查表知$\frac{(C-3)}{2}=-0.43$

即可得$C=2.14$

【例9－2】 設棉織品之破壞程度X爲$E(X)=165$，$V(X)=9$的常態分配，若$X<162$則視此棉織品爲不良品。試問隨機抽一樣本爲不良品的機率？

$$P(X<162)=P(\frac{X-165}{3}<\frac{162-165}{3})$$
$$=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.159$$

【註】 X爲棉織品的破壞強度，所以X值不可能爲負值。但隨機變數的常態分配俱有正、負值，這不就違反了常態分配的應用了嗎？但因事件｛$X<0$｝發生的機率微小，可以略而不計，即

$$P(X<0)=P(\frac{X-165}{3}<\frac{0-165}{3})=\Phi(-55)\simeq 0$$

所以只要母數μ，σ^2的選擇使$P(X<0)$爲零則常態分配的應用是十分有效的。

【例題9－3】設R爲一球所保持的半徑。其爲平均數1，變異數0.04的常態分配。試求這球所保持體積的pdf。隨機變數R的pdf爲

$$f(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.2)}exp(\frac{1}{2}[\frac{r-1}{0.4}]^2)$$

因$V=\frac{3}{4}\pi R^3$，爲R的單調遞增函數，由定理5－1得$g(v)=f(r)(\frac{dr}{dv})$，其中r均以v表示。從上述關係我們可得$r=3\sqrt{\frac{3v}{4\pi}}$ 所以$\frac{dr}{dv}=(\frac{1}{4\pi})(\frac{3v}{4\pi})^{-\frac{2}{3}}$

將這式代入上式即可得知V的pdf

【例題9－4】　設一管口的內圈直徑（inside diameter）X爲平均數μ，變異數1之常態分配的隨機變數，若X無法符合規格，則必須在製造者身上扣除一些作爲處罰。假設T爲函數X的利益，即

$$
\begin{aligned}
T &= C_1 \text{（圓）} && \text{如 } 10 \leq X \leq 12 \\
&= -C_2 && X < 10 \\
&= -C_3 && X < 12
\end{aligned}
$$

所以製造每一管口利益T的期望值爲

$$
\begin{aligned}
E(T) &= C_1 [\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)] \\
&\quad - C_2 [\Phi(10-\mu)] - C_3 [1-\Phi(12-\mu)] \\
&= (C_1+C_3)\Phi(12-\mu) - (C_1+C_2)\Phi(10-\mu) \\
&\quad - C_3
\end{aligned}
$$

若這個製造過程能夠加以調整，以便做出不同μ值的產品。試問μ爲何時，利益的期望值爲最大？欲求$E(T)$的最大值，則須算$\dfrac{dE(T)}{d\mu} = 0$。

如前，以ψ表$N(0.1)$分配的pdf。

得　$$\frac{dE(T)}{d\mu} = (C_1+C_3)[-\psi(12-\mu)] - (C_1+C_2)[-\psi$$
$$[-\psi(10-\mu)]$$

所以　$$-(C_1+C_3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}(12-\mu)^2] + (C_1+C_2)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}(10-\mu)^2] = 0$$

或　$$e^{22-2\mu} = \frac{C_1+C_3}{C_1+C_2}$$

即得　$$\mu = 11 - \frac{1}{2} ln \left(\frac{G_1+C_3}{C_1+C_2}\right)$$

【註】　(a)由上面結果看來

當 $C_2 = C_3$	則 $\mu = 11$	當 $\mu \to +\infty$	則 $E(T) \to -C_3$
$C_2 > C_3$	$\mu < 11$	$\mu \to -\infty$	$E(T) \to -C_2$
$C_2 < C_3$	$\mu > 11$		

(b)若$C_1 = \$10$，$C_2 = \$3$，且$C_3 = \$2$

則$\mu = 11 - \frac{1}{2} ln[\frac{12}{13}] = \$11.04$，代入前面式子得$E(T) =$ \$6.04（每管子）。

§ 9—5 指數分配 (The Exponeutial Distribution)

【定義】 若連續隨機變數X的pdf為

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x} \qquad x>0，\alpha>0$$
$$=0 \qquad 其他$$

則稱X具有一指數分配。

指數分配在統計學中應用甚廣，尤其是研究可靠度理論（reliability theory）方面。

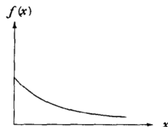


圖9－4

§ 9—6 指數分配的性質 (Properties of the Exponeutial Distribution)

(a)指數分配的累積分配函數（cdf）F為

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\,dt \quad ，當x\geq 0 \qquad (9-8)$$
$$P(X\leq t)=1-e^{-\alpha t}$$
$$P(X>t)=e^{-\alpha t} \qquad 其他=0$$

(b)X的期望值為

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx$$

以分部積分法求解，令$\alpha e^{-\alpha x}dx=dv$， $x=\mu$，

則得 $v=-e^{-\alpha x}$ $d\mu=dx$ 所以

$$E(X)=\left[-xe^{-\alpha x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha} \qquad (9-9)$$

亦即期望值恰為參數α的倒數。

若考慮$\alpha=\frac{1}{\beta}$，則X的pdf為$f(x)=\left(\frac{1}{\beta}\right)e^{-\frac{x}{\beta}}$

此時，則X的期望值即為β

(c)X的變異數可由相同積分法求出$E(X^2)=\frac{2}{\alpha^2}$

則 $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\alpha^2}$

(d)類似於式〔8，6〕在描述幾何分配，一般指數分配有如下的性質。如

$.S.\ t>0 \qquad P(X>s+t\mid X>S)$

吾人得$P(X>S+t\mid X>S)=\frac{P(X>S+t)}{P(X>S)}=\frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}}=e^{-\alpha t}$

所以　　$P(X>S+t \mid X>S)=P(X>t)$　　(9－11)

由正可證得指數分配亦如幾何分配一樣，有“*no memory*”這個性質。在第 11 章我們將需要利用到此性質。

【註】　如幾何分配一樣，性質(d)的逆敍速仍然成立。對所有 $s \cdot t>0$ 而言。假定此唯一連續隨機變數 X 爲非負數，滿足 $P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$ 的，爲一具有指數分配的隨機變數。〔雖然我們不加以證明，但此證明的主要關鍵在於指出連續函數 G 對所有 x，$y>0$ 值有 $G(x+y)=G(x)G(y)$ 的性質。即 $G(x)=e^{-kx}$ 這個事實。若我們定義 $G(x)=1-F(x)$，其中 F 是 x 的 cdf，則 G 將滿足此條件〕。

【例題9－5】　設保險絲的壽命 X 可視爲指數分配的隨機變數，今有兩種生產過程在製造保險絲。第一種出產的壽命期望值爲 100 小時，第二種爲 150 小時，若第一種保險絲的單位價格爲 C 元，第二種的價格爲 $2C$ 元。但若一保險絲不能維持超過 200 小時，則製造者必須賠償 K 元的損失，試問那一種生產過程將被採用？

$$C_I=C \qquad 若X>200$$
$$=C+K \qquad 若X\le 200$$

所以

$$E(C_I)=C\,P(X>200)+(C+K)\,P(X\le 200)$$
$$=C\,e^{-(\frac{1}{100})200}+(C+K)(1-e^{-(\frac{1}{100})200})$$
$$=C\,e^{-2}+(C+K)(1-e^{-2})$$
$$=K(1-e^{-2})+C$$

同法可得

$$E(Q_{II})-E(C_I)=C+K(e^{-2}-e^{\frac{-4}{3}})=C-0.13K$$

因此假如 $C>0.13K$，那麼吾人將選擇第一種生產方法。

【例題9－6】　設 X 爲參數 α 的指數分配，則 $E(X)=\dfrac{1}{\alpha}$，試求 X 超過其期望值的機率。

$$P(X>\frac{1}{\alpha})=e^{-\alpha(\frac{1}{\alpha})}$$
$$=e^{-1}<\frac{1}{2}$$

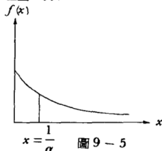


圖 9－5

【例題9－7】　設一組件失去效用的時間 T 爲指數分配，即 $f(t)=\alpha e^{-\alpha t}$。

今有 n 個這種組件被裝置好，試問經過 t 小時後，至少仍有一半組件處於可用狀態的機率？

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n}\binom{n}{k}(1-e^{-\alpha t})^{n-k}(e^{-\alpha tk})\qquad 當n爲偶數$$

$$\sum_{k=\frac{(n+1)}{2}}^{n} \binom{n}{k} (e^{-\alpha t})^{n-k} (e^{-\alpha t k}) \quad \text{當} n \text{為奇數}$$

【例題9－8】 設T為以小時計的電子眞空管壽命長度，而其隨機變數爲母數β的指數分配即pdf爲

$$f(t)=\beta e^{-\beta t}, \quad t>0$$

一部使用這眞空管的機器，它每小時的運轉費用爲C_1元，而它每小時的收益爲C_2元。且以每小時C_3元僱用一操作員，假設H爲預先簽定聘用的時數，試問H値爲何時可以得到最大的利益。

令R爲利益，則

$$R=C_2H-C_1H-C_3H \qquad \text{當} T>H$$
$$=C_2T-C_1T-C_3H \qquad \text{當} T\leq H$$

因R爲T的函數之隨機變數，所以

$$E(R)=H(C_2-C_1-C_3)P(T>H)-C_3HP(T\leq H)$$
$$+(C_2-C_1)\int_0^H t\beta e^{-\beta t}dt$$
$$=H(C_2-C_1-C_3)e^{-\beta H}-C_3H(1-e^{-\beta H})+(C_2-C_1)[\beta^{-1}-e^{-\beta H}(\beta^{-1}(H))]$$
$$=(C_2-C_1)[He^{-\beta H}+\beta^{-1}-e^{-\beta H}(\beta^{-1}+H)]-C_3H$$

欲求$E(R)$的最大值，則吾人可將其對H微分，然後令導數爲零，即

$$\frac{dE(R)}{dH}=(C_2-C_1)[H(-\beta)e^{-\beta H}+e^{-\beta H}-e^{-\beta H}$$
$$+(\beta^{-1}+H)(\beta)e^{-\beta H}]-C_3$$
$$=(C_2-C_1)e^{-\beta H}-C_3$$

因 $\dfrac{dE(R)}{dH}=0$ 知$H=-(\dfrac{1}{\beta})\ ln\,[\dfrac{C_3}{C_2-C_1}]$

若且唯若$0<\dfrac{C_3}{(C_2-C_1)}<1$，才能使$H>0$。而這樣上面的解才有意義。因爲$C_2-C_1-C_3>0$才有利益，所以上面的條件式也就相當於$C_2-C_1>0$，且$C_2-C_1-C_3>0$。

如設$\beta=0.01$ ， $C_1=\$3$ ， $C_2=\$10$ ， $C_3=\$4$

則$H=-100\,ln\,[\dfrac{4}{7}]=55.9$ 小時$\simeq 56$ 小時

所以爲了得最大收益，操作員須聘 56 小時。

§9－7 伽瑪分配 (The Gamma Distribution)

伽瑪函數的定義：(Definition of Gamma function)

令　表伽瑪函數，則其定義爲

$$\Gamma(p)=\int_{o}^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \ , \qquad p>0 \qquad (9-12)$$

以分部積分法，令 $e^{-x}dx = dv$　　　$X^{p-1}=\mu$

我們得

$$(p)=-e^{-x}x^{p-1}\Big|_{o}^{\infty}-\int_{o}^{\infty}[-e^{-x}(p-1)x^{p-2}dx]$$

$$=0+(p-1)\int_{o}^{\infty} e^{-x}x^{p-2}\ dx$$

$$=(p-1)\ \Gamma(p-1) \qquad (9-13)$$

由此可證得伽瑪函數服從循環關係，設 p 爲正整數 n，則 (9－13) 爲

$$\Gamma(n)=(n-1)\ \Gamma(n-1)$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots\cong\cdots\cdots$$

$$=(n-1)(n-2)\cdots\cdots(1)$$

然而　$(1)=\int_{o}^{\infty} e^{-x}dx=1$　　所以

$$\Gamma(n)=(n-1)! \qquad (9-14)$$

若 n 爲正整數，則可將伽瑪函數視爲階乘函數 (factorial function)

而　$$(\frac{1}{2})=\int_{o}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}dx \quad \sqrt{\pi} \qquad (9-15)$$

亦可輕易得到證明。

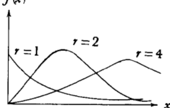


圖 9－6

【定義】　若連續隨機變數 X 的 pdf 爲

$$f(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x} \ , \ x>0$$

$$=0 \qquad \text{其他}$$

則稱 X 具有一伽瑪分配。

伽瑪分配的圖形，視母數 α，β 的值而異，但 $\alpha>0$，$\beta>0$。

§9－8　伽瑪分配的性質 (Propovties of the Gamma Distribution)

(a)當 $r=1$，式 (9－16) 爲 $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}$，顯然的指數分配爲伽瑪分配的特例。

(b)討論一下卜瓦松分配與伽瑪分配 $C\ d\ F$ 間的關係，

如　$$I=\int_{a}^{\infty}(e^{-y}\frac{y^{r}}{r!})dy \ , \qquad r \text{ 爲正整數}$$

$$a>0$$

則 $r!I=\int_a^{\infty} e^{-y}\ y^r\ dy$

以分部積分，令 $\mu=y^r$ ，$dv=e^{-y}dy$ 則 $dv=ry^{r-1}$ ，且 $v=-e^{-y}$ ，

所以 $r!I=e^{-a}a^r+r\int_o^{\infty} e^{-y}\ y^{r-1}dy$

同法可循環得

$$r!I=e^{-a}\left[a^r+ra^{r-1}+r(r-1)a^{r-2}+\cdots\cdots+r!\right]$$

所以 $$I=e^{-a}\left[1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{a^r}{r!}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{r} P(Y=K)$$ ，其中 Y 爲母數 a 的卜瓦松分配。

如有一隨機變數它的 pdf 爲式（9－16），現在來考慮一下這隨機變數的 cdf。

因 r 爲正整數，所以（9－16）式可寫爲

$$f(x)=\frac{\alpha}{(r-1)!}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}\quad ,0<x$$

且 X 的 cdf 結果變爲

$$F(x)=1-p(X>x)$$

$$=1-\int_x^{\infty}\frac{\alpha}{(r-1)!}(\alpha s)^{r-1}e^{-\alpha s}ds, \qquad x>0$$

令 $\alpha S=\mu$ ，則 $F(x)=1-\int_x^{\infty}\frac{\mu^{r-1}e^{-\mu}}{(r-1)!}d\mu$ ， $x>0$

這個積分式恰爲 I （ $\alpha x=a$ ）

所以 $$F(x)=1-\sum_{k=0}^{r-1} e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^k}{k!} \qquad x>0 \qquad (9-17)$$

因此Gamma 分配的 cdf 可以利用已製成表的 $poisson$ 分配的 cdf 來加以表示。（若 r 爲正整數，則此即爲眞確）。

【註】（9－17）式所述有關 $poisson$ 分配與 $Gamma$ 分配之 cdf 的關係，並沒有令人驚奇的地方，由下面的討論即可顯示出。

首先，我們回憶一下二項式（*binomial*）與巴斯卡分配間的關係（見8－6節註(a)）。卜瓦松分配與伽瑪分配除了後者爲連續性分配外，它們之間彼此仍存在有類似的關係。然而，處理卜瓦松分配時，我們本章所關注的是在某一固定時間內發生某事件的次數。而當我們在求事件發生的一個特定次數所需的時間分配時，就產生了伽瑪分配。

我們特別令 X 事件 A 在〔o，t〕內發生的次數， 則在適當的條件下（亦即滿足8－3節的5個假設），X 有參數爲 αt 的卜瓦松分

配，此α是在單位時間內發生A的期望次數，令$T = A$發生r次所需的時間，則我們有

$$\begin{aligned} H(t) &= p\,(\,T \le t\,) = 1 - P\,(\,T > t\,) \\ &= 1 - P\,(\,\text{在}\,[\,0\,,\,t\,]\,\text{內}\,A\,\text{考生次數少於}\,r\,\text{次}\,) \\ &= 1 - P\,(\,X < r\,) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^k}{k!} \end{aligned}$$

與（9－17）式比較，我們即建立起欲求的關係。

(c)伽瑪分配的期望值與變異數分別為

$$E(X) = \frac{r}{\alpha} \qquad V(X) = \frac{r}{\alpha^2} \qquad (9-18)$$

§9－9　卡方分配　(The chi-square Distribution)

卡方分配為伽瑪分配的一特例，即令式（9－16）中的$\alpha = \dfrac{1}{2}$，$r = \dfrac{n}{2}$且n為正整數，則我們可得一pdf為

$$f(z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\,, \qquad z > 0 \qquad (9-19)$$

的分配則稱此隨機變數Z具有一自由度為n的卡方分配。以X_n^2表之。

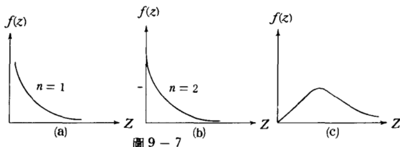


圖9－7

圖9－7顯示$n = 1$，2與>2三種情況下曲線分佈的狀態，卡方分配的期望值與變異數由式（9－18）可知

$$E(Z) = n \qquad V(Z) = 2n$$

在統計推論上，卡方分配的應用是相當重要的，因此卡方分配依參數n值的不同而編成卡方分配表。

查表的方法及其所代表的意義參考圖9－8。

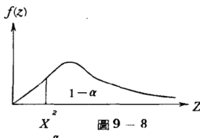


圖9－8

χ_{α}^{2} 表滿足 $P(Z \leq \chi_{\alpha}^{2}) = \alpha$ ，$0 < \alpha < 1$

【例題9－9】 設有一物體速度 V 的分配爲 $N(0.1)$。

如 $K = \frac{mv^2}{2}$ 爲此物體的動能（Kinetic energy），試求 K 的 pdf。首先令 $S = v^2$，由定理5－2直接可得 S 的 pdf 爲

$$g(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}[\varphi(\sqrt{s}) + \varphi(-\sqrt{s})]$$
$$= S^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s}{2}}$$

因 $P(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，所以將此式與（9－19）式比較即知 S 爲一 χ_{1}^{2} 分配。也就是說隨機變數 V 的平方爲 χ_{1}^{2} 分配。又，K 爲 V^2 的單調函數（monotone function），而 V^2 的 pdf 已如上式，所以動能 K 的 pdf 爲

$$h(k) = \frac{a}{m} g(\frac{2}{m}k) = \frac{2}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{2}{m}k)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{m}} \quad , \; k > 0$$

如欲估 $P(k \leq 5)$，我們並不須用 k 的 pdf，而只須查卡方分配表卽可，因

$$P(k \leq 5) = P[(\frac{m}{2}) V^2 \leq 5) = P(V^2 \leq \frac{10}{m})$$

若 m 爲已知，而因 V^2 爲一 χ_{1}^{2} 的分配，所以吾人可直接由卡方分配表得到其機率。

又由（9－20）知 V^2 的期望值爲1，變異數爲2。所以

$$E(k) = \frac{m}{2} \quad , \quad V(k) = \frac{m^2}{2}$$

亦可直接求得。

【定理9－2】 設隨機變數 Y 的分配爲 χ_{n}^{2}，若 n 爲相當大，則隨機變數 $\sqrt{2Y}$ 爲近似於 $N(\sqrt{2n-1}, 1)$ 的分配。證明從略

本定理可使用如下。假設 Y 爲 χ_{n}^{2} 的分配，而 n 爲大到無法由卡方分配表查其機率，例 $P(Y \leq t)$ 則可應用定理9－2如下：

$$P(Y \leq t) = P(\sqrt{2Y} \leq \sqrt{2t})$$
$$= P(\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} \leq \sqrt{2t} - \sqrt{2n-1})$$
$$\simeq \Phi(2t - \sqrt{2n-1})$$

而 Φ 的值可由常態分配表查得。

§9－10　各種分配的比較 (Comparisons among Various Distributions)

到目前爲止，我們已經介紹許多種的機率分配。

在離散型（discrete）有：二項分配（binomial distribution）
　　　　　　　　　　　巴斯卡分配（Pascal distribution）
　　　　　　　　　　　卜瓦松分配（Poisson distribution）

在連續型（continuous）有：指數分配（exponential distribution）
　　　　　　　　　　　　幾何分配（geometric distibution）
　　　　　　　　　　　　伽嗎分配（Gamma distribution）

在此，我們將不再闡述導致這些分配的各種假設，最主要的是指出存在於這些分配間，其隨機變數的相似（或相異）處。

1. 假設獨立的伯諾里試行（Bernoullitrials）已經完成的情況下。
   (a)隨機變數：在固定的試行次數中，A事件發生的次數。
   　　分配：二項分配。
   (b)隨機變數：當事件A第一次發生時，所試行的伯諾里試行次數。
   　　分配：幾何分配。
   (c)隨機變數：A事件發生第r次時，的伯諾里試行次數。
   　　分配：巴斯卡分配。
2. 假設有一卜瓦松處理過程（參例8－5）
   (d)隨機變數：在一固定時間間隔內、事件A發生的次數。
   　　分配：卜瓦松分配。
   (e)隨機變數：事件A第一次發生時，所須的時間。
   　　分配：指數分配。
   (f)隨機變數：事件A第r次發生時，所須的時間。
   　　分配：伽嗎分配。

【註】觀察a與d，b與e，c與f的同似處。

§9－11　雙變數常態分配 (The Bivariate Normal Distribution)

我們已經討論過的連續隨機變數均爲一維隨機變數（one-dimensionas）正如我們第六章所提及，高階（higher-dimensional）隨機變數在描述試驗結果（experimeutal outcomes）扮演了一份重要的角色。今定義連續性二維隨機變數如下：

【定義】　設（X，Y）爲一連續性的二維隨機變數，且所有值皆在歐幾里得（euclidean）平面上，若其聯合機率密度函數如下，則吾人稱（X，Y）爲一雙變數常態分配（bivariate normal distribution）

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\sigma^2}}\times exp\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}[(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2$$
$$-2p\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2]\}$$
$$-\infty<x<\infty, \quad -\infty<y<\infty \qquad (9-12)$$

這 pdf 決定於5個參數。在對這函數下一合法的 pdf 定義時（即 $f(x, y)\geq 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy=1$）。吾人必須對其參數作如下的限制，$-\infty<\mu_x<\infty$：$-\infty<\mu_y<\infty$；$\sigma_x>0$；$\sigma_y>0$； $-1<\rho<1$。

【定理9－3】 設（X，Y）的 pdf 如式（9－21），則

(a)其 X 與 Y 的邊際分配（marginal distributions）分別為 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 與 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$

(b)參數 ρ 為 X 與 Y 的相關係數（Correlation Coefficient）。

(c)X 與 Y 的條件分配（Conditional distributions）分別。

為 $N[\mu_x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y), \sigma_x^2(1-\rho^2)]$，

$N[\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x), \sigma_y^2(1-\rho^2)]$

證明參考習題9－21。

【 註 】 (a)定理（9－3）的逆敍述為不眞。但對一非雙變數且 X 與 Y 為一維的邊際機率密度函數的聯合機率密度函數而言，這是可能的。

(b)在（X，Y）的聯合機率密度函數，若 $\rho=0$，即相當於 X 與 Y 彼此間獨立。

(c)定理（9－3）的 C 顯示兩個平均數（mean）的迴歸函數均為線性。而且條件分配的變異數均乘上一係數（$1-\rho^2$），其意義為，若 ρ 近於零，則條件變異數與非條件一樣。但若 ρ 趨近於±1，則條件變異數近於零。

【定理9－4】 若 f 為如式（9－3）之雙變常態機率密度函數，考慮 $Z=f(x, y)$ 的表面為

(a) $Z=C$ 常數，則其表面的剖面為橢圓形。

(b)若 $\rho=0$，且 $\sigma_x=\sigma_y$，則上述橢圓變為圓形。

§9－12 截尾式分配 (Truncated Distributions)

【 例 】 假設製造某一型式的螺釘，其長 Y 為以 $N(2.2, 0.01)$ 分配的隨機變數。令假定新獲一批螺釘，而將這批內 $Y>2$ 的部份拋棄，而設 X

表這批新螺釘的隨機變數，且F表其cdf。

則　$F(x)=p(X\leq x)$

$=p(Y\leq x \mid y\leq 2)=1$　若$x>2$

$=p\dfrac{(y\leq x)}{h(y\leq 2)}$　若$x\leq 2$

參圖（9－9），X的機率密度函數f為

$f'(x)=F'(x)=0$　當$x>2$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.1)}exp(-\frac{1}{2}[\frac{x-2.2}{0.1}]^2)}{\Phi(-2)}\quad 當x\leq 2$$

圖9－9

因

$$P(Y\leq 2)=P(\frac{Y-2.2}{0.1}\leq\frac{2-2.2}{0.1})=\Phi(-2)$$

上式所述為一截尾式的常態分配（truncated normal distribuiion）

【定義】　若隨機變數X的pdf為如下式，則稱X為截去$X=\tau$的右邊的常態分配。

$f(x)=0$　當$x>\tau$

$$\sigma=k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp(-\frac{1}{2}[\frac{x-\mu}{\sigma}]^2)\quad 當x\leq\tau\quad(9-22)$$

係數k由條件$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$所決定

即　$$K=\frac{1}{\Phi[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}]}=\frac{1}{\rho(Z\leq\tau)}$$

其中Z的分配為$N(\mu,\sigma^2)$。

【定義】　若隨機變數X的pdf為如下式，則稱X為一截去$X=r$左邊的常態分配。

$f(x)=0$　當$x<r$

$$=\frac{k}{\sqrt{2k}\sigma}exp(-\frac{1}{2}[\frac{x-\mu}{\sigma}]^2)\quad 當x\geq r$$

係數k由條件$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$所決定

即　$$k=[1-\Phi(\frac{r-\mu}{\sigma})]^{-1}$$

上述介紹的觀念可由常態分配擴展到其他種分配上，如X為指數分配的隨機變數，若其截去$X=r$的左邊，其pdf將為

$$f(x) = 0 \qquad 當 x < r$$
$$= C\alpha e^{-\alpha x} \qquad 當 x \geq r \qquad (9-24)$$

C 值亦由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ 來決定

即　$C = e^{\alpha r}$

我們亦可考慮離散型的截尾式隨機變數，如，X 爲卜瓦松分配的隨機變數，其參數爲 λ，且被截去 $X = k+1$ 的右邊，則其 X 的分配爲。

$$P(X = i) = 0 \qquad 當 i \geq k+1$$
$$= C\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \qquad 當 i = 0.1 \cdots\cdots k$$

C 值由 $\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = 1$ 所決定

$$C = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{\lambda^j}{j!}\right)e^{-\lambda}}$$

所以　$P(X = i) = \dfrac{\lambda^i}{i!}\dfrac{1}{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{\lambda^j}{j!}\right)}$ ，$t = 0，1 \cdots\cdots k$

$= 0$ 　　　　其他

【例題 9－11】 設 X 表一組件（component）的壽命長，若 X 爲常態分配。

其　$E(X) = 4$ 　　　$V(X) = 4$

則　$P(X < 0) = \Phi(-2) = 0.023$

這機率所代表的事件，我們知道它是不可能發生的。因此這一模式“model”並非很有意義。但若截去隨機變數 X 在 $X = 0$ 左邊，則其 pdf 爲

$$f(x) = 0 \qquad 當 x \leq 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2)} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\Phi(2)} \qquad 當 x > 0$$

【註】 我們時常以常態分配來代替一我們已知其不能有負值的隨機變數。這之中乃是假定 $P(X < 0)$ 非常微小，可略而不計。但假若並不是這種情況（如例 9－11），我們將考慮使用常態分配截去 $X = 0$ 左邊者。

【例題 9－12】 設有一系統由 n 個彼此獨立的組件組合而成，其每個組件能正常操作之機率均爲 P，當這系統出了毛病，則希望去發現那一個且有多少個組件發生問題，令隨機變數 X 表這系統中出了毛病的組件數。若且唯若這系統出了毛病，則至少有一組件出了問題，即 X 爲一個二項分配截去 $X = 0$ 左邊者 。由此可知除了 $X = 0$ 外，這個系統即已出了毛病

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}}{P\text{〔系統出毛病〕}},\quad k=1,2\cdots\cdots n$$

因P（系統出毛病）$=1-P^n$　所以

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}}{1-p^n},\quad k=1,2\cdots\cdots n$$

【例9－13】 假設由輻射源放射的粒子以λ爲參數的卜瓦松分配。若計數器上的記錄只記下在單位時間內到達的粒子少於三粒者（超過三粒時，計數器則停止顯示），令Y表在單位時間內記下的粒子數，亦卽Y的可能值爲0，1，2。

$$P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\frac{\lambda^k}{e^{-\lambda}\left[1+\lambda+\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right]},\quad k=0,1,2$$

$$=0 \qquad\qquad \text{其他}$$

假設X爲截去$X=T$右邊的常態隨機變數，則其pdf爲

$$f(x)=0 \qquad\qquad 當x\ge\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\frac{1}{\Phi\left[\frac{(T-\mu)}{\sigma}\right]} \qquad 當x\le\tau$$

所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\Phi\left[\frac{(T-\mu)}{\sigma}\right]}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$$

$$exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Phi\left[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}\right]}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}}(s\sigma+\mu)\,e^{\frac{-s^2}{2}}ds$$

$$=\frac{1}{\Phi\left[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}\right]}\left[\mu\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)+\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}}se^{\frac{-s^2}{2}}dx\right.$$

$$=\mu+\frac{\sigma}{\Phi\left[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}\right]}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-s^2}{2}}(-1)\Bigg|_{-\infty}^{\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}}$$

$$=\mu-\frac{\sigma}{\Phi\left[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}\right]}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

式中函數Φ爲分配$N(0,1)$的cdf，而$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{-x^2}{2}}$爲$N(0,1)$分配時其機率密度函數的縱座標，且已製成表格。事實上其商$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{-x^2}{2}}}{\Phi(x)}$亦已製成表格。

當碰到下述這種問題，可應用上面的結果來加以討論。已知μ與σ。爲了要使期望值在截去後的值等於預定值A，試問τ將從何處截去？

在解答這問題，必須靠常態分配表的幫助，設$\mu=10$，$\sigma=1$，且若需要$A=9.5$，則

$$9.5=10-\frac{1}{\Phi(\tau-10)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\tau-10)^2}{2}}$$

此式變爲 $\frac{1}{2}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{-(\tau-10)^2}{2}}}{\Phi(\tau-10)}$

參考上述表格得$\tau-10=0.52$，所以$\tau=10.52$。

【註】上述問題即已知μ，σ，和一特定值A，然後解

$$\mu-A=\frac{\sigma}{\Phi\left[\frac{(\tau-\mu)}{\sigma}\right]}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

此　此式的右邊爲正值，所以若欲使本題有解，須令$(\mu-A)>0$。



9－1 假定X有分配$N(2,0.16)$，利用常態分配表，求下列機率
(a) $P(X>2.3)$　(b) $P(1.8\leq X\leq 2.1)$

9－2 一電纜的直徑是常態分配，且期望值0.8，變異數0.0004，問直徑超過0.81 *inch* 的機率爲何？

9－3 假設習題（9－2）的電纜若其直徑與期望值差異超過0.025，則視爲不良品，問獲得一不良品的機率爲何？

9－4 某量長器所發生的誤差是常態分配，期望值爲0，標準離差是1吋，問誤差超過1吋，2吋，3吋的機率各爲多少？

9－5 假設兩架電子儀器D_1，D_2的壽命分別有分配$N(40,36)$，$N(45,9)$。如果我們要使用45小時，我們喜歡那一架？如果是48小時呢？

9－6 如果X有分配$N(0,1)$，則$Y=|X|$的pdf是什麼？$E(Y)$和$V(Y)$又是多少？

9－7 假定我們正在測量平面上一物體的位置，令X和Y分別是在x軸和y軸上測量所發生的誤差。如果X和Y彼此獨立且均爲$N(0,\sigma^2)$的分配，試求$R=\sqrt{X^2+Y^2}$的pdf。（R的分配稱爲Rayleigh分配）〔Hint 令$X=R\cos\psi$，求(R,ψ)的joint pdf再求R的marginal pdf〕。

9－8 求$Q=X/Y$的pdf，此X和Y的分配如習題9－7．（Q的分配稱爲Cauchy分配）你能算出$E(Q)$嗎？

9－9 有一種品常態分配有密切關係的分配是lognormal分配。假定X的分配是$N(\mu,\sigma^2)$，令$Y=e^X$，則說Y有lognormal分配，（亦即，Y是lognormal若且唯若$\log Y$是normal），試求Y的pdf. Note：上面的分配可以代表下面的隨機變數：經過壓縮過程後的小質點直徑或受過幾次小衝擊後的有機體大小，以及某物品的壽命。

9－10 假設X有分配$N(\mu,\sigma^2)$，試決定C值使$P(X\leq C)=2P(X>C)$。

9－11 假設溫度（攝氏）是常態分配，其期望值是50°C，變異數4，問溫度在48°C與53°C之間的機率爲何？

9－12 軸之外直徑D限定爲4吋。我們將D考慮爲常態分配隨機變數其期望值4吋，變異數0.01（吋）^{2}，如果實際直徑與限定的差異多於0.05吋，但少於0.08吋，廠商損失$ 0.50。如果差異多於0.08吋，則損失$ 1.00。損失L可視爲隨機變數，試求L的機率分配，且求$E(L)$。

9－13 在下列叁種情況裏，將由Chebyshev不等式求得的$P[|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}]$的上界與精確的機率做個比較。

(a)X有分配$N(\mu,\sigma^2)$　　(b)X有叁數是λ的卜瓦松分配

(c)X有叁數是α的指數分配

9－14 假設X是個隨機變數，且$E(X)=\mu$，$V(X)=\sigma^2$，又假設Y均勻分配在區間(a,b)上，試決定a，b之值使得$E(X)=E(Y)$，$V(X)=V(Y)$。

9－15 假設繩索的斷力（磅）有分配$N(100,16)$，如果$X>95$，每100呎一捲的繩索可賺$ 25，如果$X\leq 95$，則每捲賺$ 10，試求每捲的期望利潤。

9－16 令X_1和X_2是獨立隨機變數，每個均有分配$N(\mu,\sigma^2)$，令$Z(t)=X_1\cos\omega t+X_2\sin\omega t$且令$V(t)=dZ(t)/dt$（$\omega$是常數）。

(a)對任何固定的t而言，$Z(t)$和$V(t)$的機率分配爲何？

(b)證明$Z(t)$和$V(t)$是不相關的（uncorrelated）。

9－17 火箭燃料含有X%的某一特殊混合物，X被限定在30與35之間，廠商製造燃料其每加侖的利潤是X的函數，被定義爲：

$T(X)=\$0.10$／每加侖　if　$30<X<35$

$= \$ 0.05$ ／每加侖　　if　　$35 \leq X < 40$

或　　$25 < X \leq 30$

$= - \$ 0.1$ ／每加侖　　$elsewheve$

(a)如果X的分配是$N(33, 9)$，計算$E(T)$。

(b)假定廠商想將其期望利潤$E(T)$增加5％，他的方法是想在滿足限定條件，$30 < X < 35$，之燃料上增加每加侖的利潤，問其新利潤該爲多少？

9－18 考慮例9－8，假設操作員當機器正在操作時的工錢是每小時C_3元，但其餘被僱時間內如果機器壞掉，則工錢是每小時C_4（$C_4 < C_3$）元，再決定H（操作員僱用時數）之值使期望利潤最大？

9－19 證明$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$。（見9－15）

〔$hint$ 在積分$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx$ 時變換變數$x = \frac{u^2}{2}$〕

9－20 證明（9－18）式成立。

9－21 證明定理9－3。

9－22 證明定理9－4。

9－23 假定隨機變數X有個自由度是10的Chi-$Square$分配。如果我們要找a和b使得$P(a < x < b) = 0.85$，我們該體認的是有許多這種（a，b）數對。

(a)試求滿足上面條件的兩個不同的（a，b）數對。

(b)假設除了上面的條件，我們還限制$P(X < a) = P(X > b)$，問有多少這種（a，b）數對。

9－24 假設質量是1公斤的物體的速度（cm/sec）V是個隨機變數有分配$N(0, 25)$，令$K = 1000V^2/2 = 500V^2$代表物體的動態，試求$P(K < 200)$，$P(K > 800)$。

9－25 假設X有分配$N(\mu, \sigma^2)$，利用定理7－7，以求$E(Y)$和$V(Y)$的近似值，這兒$Y = \log X$。

9－26 假設X有如（9－22）式所給的截尾指數分配，試利用已製成圖表的函數表出$E(X)$。

9－27 假設X有如（9－24）式所給的截尾指數分配，試求$E(X)$。

9－28 (a)試求截掉$X = n$右側的二項式分配隨機變數（依據n次重複試驗）的機率分配；也就是說$X = n$不可能發生時，求X的機率分配。

(b)試求(a)部份所敘述的隨機變數的期望值與變異數。

9－29 假設期望值是μ，變異數是σ^2的常態分配隨機變數被截掉$X = \tau$之左側，$X = r$之右側，試求此“兩尾被截”之變數的pdf。

9－30 竹竿長度X有分配$N(10,2)$，我們不測量X的值，而只說明是否合乎要求。特別地，製造出的每根竹竿分類爲$X<8$，$8\leq X<12$和$X\geq 12$。如果製造15根竹竿，問每一分類均有同數的竹竿的機率爲何？

9－31 某地區的年雨量已知是常態分配隨機變數，其期望值等於29.5 吋，標準偏差2.5吋，問年雨量要多大才能使其被超過的機率大約是5％？

9－32 假定X有分配$N(0,25)$，試求$P(1<X^2<4)$。

9－33 令X_t表t小時內由放射性物質放出的質點個數，且令X_t有個參數是βt的卜瓦松分配，令T等於第一個質點出現的時數，證明T有個參數是β的指數分配〔*Hint* 尋找事件$T>t$的對等事件（以X_t表出）〕。

9－34 X_t如習題9－33但$\beta=30$，問連續二個質點出現所需的時間大於5分鐘的機率爲何？大於10分鐘呢？小於30秒呢？

9－35 在某些常態分配表內，$H(x)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\alpha t$，只對正$x$才被製成表。（不像附錄內的$\Phi(x)$）。如果$X$有分配$N(1,4)$，請利用函數$H$的表值表出下列機率。

(a) $P[\,|X|>2\,]$　　(b) $P[\,X<0\,]$

9－36 假設某衞星遙測器收到兩種信號，此兩種信號可記錄爲實數X和Y。假設X和Y是獨立連續隨機變數其pdf分別是f和g。如果在任何特定時間內只能收到一種信號且將此先到達的信號送回地球。又如果產生X值的信號先到達的機率是p。因此產生Y值的信號先到達的機率則爲$1-p$，令Z是個隨機變數，其值就是實際被收到和送回的。

(a)以f和g表出Z的pdf。

(b)以$E(X)$和$E(Y)$表出$E(Z)$。

(c)以$V(X)$和$V(Y)$表出$E(Z)$。

(d)假設X有分配$N(2,4)$且Y有分配$N(3,3)$，如果$p=\frac{2}{3}$，試求$P(Z>2)$。

(e)假設X和Y分別有分配$N(\mu,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，證明：如果$\mu_1=\mu_2$，則Z的pdf有且只有一相對極大值。

3－37 假設一工廠意外事件的次數可以每週平均2次事件的卜瓦松過程代表它。問

(a)由一事件到下一事件需時3天以上的機率。

(b)由一事件到下面二事件需時7天以上的機率，〔*Hint*：在(a)裏，令T＝時間（天），且計算$P(T>3)$〕。

9－38 平均而言，一生產過程在300件產品中有一件不良品，求

(a)在未製造1000件以前。　　(b)當製造第1000件時。

(c)製完第 1000 件以後
將出現第 3 件不良品的機率？（*Hint*：利用卜瓦松過程）



9－1

【解】 (a)令 $Y=\dfrac{x-2}{0.4}$ 則 Y 有 $N(0,1)$ 分配

$$\therefore P(X\geq 2.3)=1-p(X\leq 2.3)$$
$$=1-p\left(\frac{x-2}{0.4}\leq\frac{2.3-2}{0.4}\right)$$
$$=1-p(Y\leq 0.75)$$
$$=1-\Phi(0.75)$$
$$=1-0.7734=0.2266$$

(b) $P(1.8\leq X\leq 2.1)=p(X\leq 2.1)-p(X\leq 1.8)$
$$=p\left(\frac{x-2}{0.4}\leq\frac{0.1}{0.4}\right)-p\left(\frac{x-2}{0.4}\leq\frac{-0.2}{0.4}\right)$$
$$=p(Y\leq 0.25)-p(Y\leq -0.5)$$
$$=0.5987-0.3085$$
$$=0.2902$$

9－2

【解】 令 X 表電纜的直徑 X 有 $N(0.8, 0.0004)$ 的分配

令 $Y=\dfrac{x-0.8}{0.02}$ 　則 Y 有 $N(0.1)$ 的分配

$$\therefore P(X>0.81)=1-p(X\leq 0.81)$$
$$=1-p\left(\frac{x-0.8}{0.02}\leq\frac{0.81-0.8}{0.02}\right.$$
$$=1-p(Y\leq 0.5)$$
$$=1-\Phi(0.5)$$
$$=1-0.6915$$
$$=0.3085$$

9－3

【解】 $P(|x-\mu|>0.025)=p[x-\mu>0.025]+p[x-\mu<-0.025]$
$$=1-p\left[\frac{x-\mu}{0.02}<\frac{0.025}{0.02}\right]$$
$$+p\left[\frac{x-\mu}{0.02}<\frac{-0.025}{0.02}\right]$$

$= 1 - \Phi(1.25) + \Phi(1 - 1.25)$
$= 2\Phi(-1.25)$
$= 2 \times 0.1056 = 0.2112$

9-4

【解】 令X表量時所生的誤差

X有$N(0.1)$的分配

$\therefore P(X \geq 1) = 1 - p(X < 1)$
$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$P(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - \Phi(2)$
$= 1 - 0.9772 = 0.028$

$P(X \geq 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$

9-5

【解】 令X表D_1之壽命長有$N(40, 36)$的分配

Y表D_2之壽命長有$N(45, 9)$的分配

(a) 使用於45小時期間

$$P(X \geq 45) = p\left(\frac{x - 40}{6} \geq \frac{45 - 40}{6}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{x - 40}{6} < 0.834\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.834) = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

$$P(Y \geq 45) = p\left(\frac{Y - 45}{3} \geq \frac{45 - 45}{3}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

故D_2較D_1有利

9-6

【解】 (a) $Y = |X|$

Y的 *cdf* (*Cumuelative distribution function*)

$G(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$
$= P(-y \leq X \leq y) = P(x \leq y) - P(x \leq -y)$
$= \Phi(y) - \Phi(-y)$
$= 2\Phi(y) - 1$ 〔因$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$〕

The pdf of Y is

$$g(y) = \frac{}{dy} G(y) = 2\Phi'(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad 0 < y < \infty$$

9-7

(b) $E(Y) = \int_0^\infty y \cdot g(y)\, dy = \int_0^\infty y \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

令 $\mu=\frac{y^2}{2}$ $\qquad\therefore d\mu=y\,dy$

$$\therefore E(Y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\mu}\,du=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\mu}\Big|_0^\infty=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(c) $E(Y^2)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^2e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

令 $\mu=y$ $\qquad du=ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

$du=dy$ $\qquad v=-e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$E(Y^2)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

又因 $\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=1$

$\therefore\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\sqrt{2\pi}$ $\qquad\therefore\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

$$E(Y^2)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=1-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}$$

9－7

【解】 $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ $\qquad$ 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

則 $|J|=r$

又 X，Y 獨立，$\therefore f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$

$g(r,\theta)=f(x,y)\,|J|=f_1(r\cos\theta)f_2(r\sin\theta)\,r$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{r^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{r^2\sin^2\theta}{2\sigma^2}}\cdot r$$

$$=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore h(r)=\int g(r,\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,d\theta$$

$$=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

9－8

【解】 $Q=\frac{X}{Y}$ ，X，Y 彼此獨立，具有 pdf 分別為

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad h(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

則由 6－5 知 θ 的 pdf 為

$$g(z)=\int_{-\infty}^{\infty} g(vz)\,h(z)\,|v|\,dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2z^2}{\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{v^2}{\sigma^2}}\,|v|\,dv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{v^2(z^2+1)}{2\sigma^2}}\,|v|\,dv$$

由對稱關係知

$$\therefore g(z)=2\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{v^2(z^2+1)}{2\sigma^2}}\,v\cdot dv$$

令 $S=\frac{v^2(z^2+1)}{2\sigma^2}$ $\qquad \therefore ds=\frac{z^2+1}{\sigma^2}v\,dv$

$$g(z)=\frac{1}{\pi\sigma^2}\frac{\sigma^2}{z^2+1}\int_{0}^{\infty}e^{-s}\,ds=\frac{-1}{\pi(z^2+1)}e^{-s}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi(z^2+1)}$$

9－9

【解】 由 5－1 知 Y 的 pdf 為

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$x=\ln y \qquad \therefore \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

9－10

【解】 X 有 $N(\mu,\sigma^2)$ 的分配

$\therefore \frac{X-\mu}{\sigma}$ 有 $N(0,1)$ 的分配

$$P(X\le C)=p\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{C-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right)$$

$P(X>C)=1-\Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})$

因 $P(X\leq C)=2P(X>C)$

$\therefore\Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})=2[1-\Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})]$

$3\Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})=2$ $\qquad\Phi(\frac{C-\mu}{\sigma})=\frac{2}{3}=0.66$

由常態分配表得

$\frac{C-\mu}{\sigma}=0.433$ $\qquad\therefore C=0.433\sigma+\mu$

9－11

【解】 令X表溫度有$N(50,4)$的分配

令$Y\frac{X-50}{2}$則Y有$N(0,1)$的分配

$\therefore P(48°<53°)=p(\frac{X-50}{2}<\frac{53-50}{2})-p(\frac{X-50}{2}<\frac{48-50}{2})$

$=p(Y<1.5)-p(Y<-1)$

$=\Phi(1.5)-\Phi(-1)$

$=0.9332-0.1587=0.7745$

9－12

【解】 直徑有$N(4,0.001)$的分配

損失 $L=0.5$ $\quad$ *if* $\quad 0.05<|D-4|<0.08$

$=1$ $\quad$ *if* $\quad |D-4|>0.08$

令$Y=\frac{D-4}{0.1}$ 則Y有$N(0.1)$的分配

$\therefore P(0.05<|D-4|<0.08)=p(|D-4|<0.08)$

$-p(|D-4|<0.05)$

$=2[p\frac{D-4}{0.1}<\frac{0.88}{0.1})$

$-p(\frac{D-4}{0.1}<\frac{0.05}{0.1})]$

$=2[p(Y<0.8)-p(Y<0.5)]$

$=2[\Phi(0.8)-\Phi(0.5)]$

$=2[0.7881-0.6915]$

$=2\times0.0966$

$=0.1932$

$$P(|D-4|>0.08)=2[1-p(D-4<0.08)]$$
$$=2[1-p(\frac{D-4}{0.1}<\frac{0.08}{0.1})]$$
$$=2[1-p(Y<0.8)]$$
$$=2[1-\Phi(0.8)]$$
$$=2[1-0.7881]$$
$$=2\times 0.2119=0.4238$$

故L的機率分配為

$P(L=0.5)=0.1932$　　　$P(L=1)=0.4238$

$E(L)=0.5\times 0.1932+1\times 0.4238=0.5204$

9－13

【解】　由切氏不等式$P[|X-E(X)|\geq k\sqrt{V(X)}]\leq k^{-2}$

$\therefore P[|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}]\leq 2^{-2}$

故 *upper bound* 為$\frac{1}{4}$

(a)若X具常態分配$N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$　　　　　$V(X)=\sigma^2$

$$\therefore P[|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}]=p[|X-\mu|\geq 2\sigma]$$
$$=p[\frac{|X-\mu|}{\sigma}\geq 2]$$
$$=2p[\frac{X-\mu}{\sigma}\geq 2]$$
$$=2[1-p(\frac{X-\mu}{\sigma}<2)]$$
$$=2(1-\Phi(2))$$
$$=2\times 0.0228=0.0456$$

(b)X為卜氏分配參數λ

$E(X)=\lambda$　　　　　$V(X)=\lambda$

$$\therefore P[|X-E(X)\geq 2\sqrt{V(X)}]=p[|X-\lambda|\geq 2\sqrt{\lambda}]$$
$$=p[X-\lambda\geq 2\sqrt{\lambda}]+p[X-\lambda\leq -2\sqrt{\lambda})$$
$$=p[X\geq\lambda+2\sqrt{\lambda}]+p[X\leq\lambda-2\sqrt{\lambda}]$$
$$=1-p[X\leq\lambda+2\sqrt{\lambda}]+p[X<\lambda-2\sqrt{\lambda}]$$

(c)X為指數分配參數α　　$\therefore X=0$

$E(X)=\frac{1}{\alpha}$ $\qquad V(X)=\frac{1}{\alpha^2}$

$\therefore P[\,|X-E(X)|\geq 2\sqrt{V(X)}\,]=P[\,|X-\frac{1}{\alpha}|\geq 2\frac{1}{\alpha}\,]$

$=P(X\geq\frac{3}{\alpha})$

9－14

【解】 $E(X)=\mu$ $\qquad V(X)=\sigma^2$

$E(Y)=\frac{a+b}{2}$ $\qquad V(Y)=\frac{(b-a)^2}{12}$

若$E(X)=E(Y)$ $\qquad V(X)=V(Y)$

$\frac{a+b}{2}=\mu$ $\qquad \frac{(a-b)^2}{12}=\sigma^2$

$a+b=2\mu$ ……………(1) $\qquad (b-a)^2=12\sigma^2$ ………………(2)

由(2) $b-a=\sqrt{2\sqrt{3}\sigma}$ ………………(3)

(1)+(3) $\qquad b=\mu+\sqrt{3}\sigma$ $\qquad a=\mu-\sqrt{3}\sigma$

9－15

【解】 令X表 *rope* 的強度有$N(100，16)$的分配

令Y表 *profit*

則$Y=25$ $\qquad$ 若$X>95$

$=10$ $\qquad$ 若$X\leq 95$

令$X_1=\frac{X-100}{4}$，則X_1有$N(0.1)$的分配

$\therefore P(X>95)=p(\frac{X-100}{4}>\frac{95-100}{4})$

$=P(X_1>-1.25)=1-\Phi(-1.25)$

$=1-0.1056=0.8944$

$P(X\leq 95)=0.1056$

$E(Y)=25\times 0.8944+10\times 0.1056=23.4$

9－16

【解】 (a)$Z(t)=X_1\cos wt+X_2\sin wt$

$V(t)=\frac{dZ(t)}{dt}=-wX_1\sin wt+wX_2\cos wt$ $\qquad$ w爲常數 t固定時

$X_1, X_2\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\therefore Z(t) \sim N(\mu \cos wt + \mu \sin wt\ ,\ \sigma^2 \cos^2 wt + \sigma^2 \sin^2 wt)$

$\therefore Z(t) \sim N(\mu \cos wt + \mu \sin wt\ ,\ \sigma^2)$

$V(t) \sim N(-w\mu \sin wt + m\mu \cos wt\ ,\ w^1 \sigma^2 \sin^2 wt + w^2 \sigma^2$
$+ w^2 \sigma^2 \cos^2 wt)$

(b)X_1 ,X_2 爲獨立隨機變數數

$$M(t_1, t_2) = \iint e(-wX_1 \sin wt + wX_2 \cos wt)\ t_1$$
$$+ (X_1 \cos wt + X_2 \cos wt)\ t_2$$
$$\cdot f(x_1) f(x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$E(V(t)) = \frac{2M}{2\ t_1}\Bigg|\ t_1 = t_2 = 0$$
$$= -wX_1 \sin wt + wX_2 \cos wt$$

$$E(Z(t)) = \frac{2M}{2\ t_2}\Bigg|\ t_1 = t_2 = 0$$
$$= X_1 \cos wt + X_2 \sin wt$$

$$E(V(t)Z(t)) = \frac{2^2 M}{2\ t_2\ 2\ t_1}\Bigg|\ t_1 = t_2 = 0$$
$$= (-wX_1 \sin wt + wX_2 \cos wt)$$
$$\cdot (X_1 \cos wt + X_2 \sin wt)$$

$\therefore E(VZ) - E(V)\ E(Z) = 0$
$\therefore \rho =$
$\therefore \rho = 0$

$\therefore V$ ，Z爲獨立（$\because V$ ，Z皆爲常態分配）

9 − 17

【解】 (a)X有$N(33\ ,\ 9)$的分配

令$X_* = \dfrac{X - 33}{3}$則X_*有$N(0.1)$的分配

$$P(30 < X < 35) = p\left(\frac{30-33}{3} < \frac{X-33}{3} < \frac{35-33}{3}\right)$$

$$= p(-1 < X_s < 0.67)$$
$$= p(X_s < 0.67) - p(X_s < -1)$$
$$= \Phi(0.67) - \Phi(-1)$$
$$= 0.7486 - 0.1587 = 0.5899$$

$$P(35 \leq X < 40) = p\left(\frac{35-33}{3} \leq \frac{X-33}{3} < \frac{40-33}{3}\right)$$
$$= p(0.67 \leq X_s < 1.67)$$
$$= \Phi(1.67) - \Phi(0.67)$$
$$= 0.9525 - 0.7486 = 0.2039$$

$$P(25 < X \leq 30) = p\left(\frac{25-33}{3} < \frac{X-33}{3} \leq \frac{30-33}{3}\right)$$
$$= p(-2.67 < X_s \leq -1)$$
$$= \Phi(-1) - \Phi(-2.67)$$
$$= 0.1587 - 0.0038 = 0.1549$$

$$P(X = otherwise) = 1 - 0.5899 - 0.2039 - 0.1549$$
$$= 0.0513$$

$$E(T) = 0.1 \times 0.5899 + 0.05 \times (0.2039 + 0.1549)$$
$$- 0.1 \times 0.0513 = 0.0718$$

(b)若 $E(T)$ 增加 50 %

則 $E(T)$ 增加值 $= 0.0718 \times \frac{1}{2} = 0.0359$

$$0.0359 = (X - 0.1) \times 0.5899$$
$$X = 0.1 + 0.061 = 0.161$$

故當 $30 < X < 35$ 時的 *profit* 應爲 0.161 元

9－18

【解】 壽命長 T 有參數爲 β 的指數分配

$f(t) = \beta e^{-\beta t}$ *profit* : R

$$R = C_2H - C_1H - C_3H \qquad if \quad T > H$$
$$= C_2T - C_1T - C_3T - C_4(H - T) \qquad if \quad T \leq H$$

$$\therefore E(R) = H(C_2 - C_1 - C_3)P(T > H) - C_4HP(T \leq H)$$
$$+ (C_2 - C_1 - C_3 + C_4) \int_0^H t\beta e^{-\beta t}\,dt$$
$$= H(C_2 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} - C_4H(1 - e^{-\beta H})$$
$$+ (C_2 - C_1 - C_3 - C_4)[\beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)]$$
$$= (C_2 - C_1 - C_3)[He^{-\beta H} + \beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)]$$
$$+ C_4[\beta^{-1} - H - \beta^{-1}e^{-\beta H}]$$
$$= (C_2 - C_1 - C_3)[\beta^{-1} - \beta^{-1}e^{-\beta H}]$$
$$+ C_4[\beta^{-1} - H - \beta^{-1}e^{-\beta H}]$$

$$\therefore \frac{dE(R)}{dH} = (C_1 - C_2 \quad C_3)\beta^{-1}\beta e^{-\beta H} + C_4[-1-\beta^{-1}(-\beta)e^{-\beta H}]$$

$$= (C_2 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} + C_4(e^{-\beta H} - 1)$$

$$= (C_2 + C_4 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} \cdot C_4$$

$$= 0$$

$$e^{-\beta H} = \frac{C_4}{C_2 + C_4 - C_1 - C_3}$$

$$H = -\left(\frac{1}{\beta}\right) ln \frac{C_4}{C_2 + C_4 - C_1 - C_3}$$

9－19

【解】 $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$　　　　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$

令 $x = \frac{\mu^2}{2}$　　　　$\mu = \sqrt{2x}$

$dx = \mu\, du$　　　　$du = \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}(x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{2} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu$　又：$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

9－20

【解】 (a) X 為參數 r 與 α 的 $Gamma$ 分配

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha r} \qquad x \geq 0$$

$$= 0$$

$$E(X) = \int_0^\infty x \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty (\alpha x)^r e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty (\alpha x)^r e^{-(\alpha x)} d(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Gamma(r)}\Gamma(r+1)$$　〔由 *gamma function* 之定義〕

$$= \frac{r}{\alpha}$$

(b) $E(X^2)=\int_0^\infty x^2\frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}dx$

$$=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty(\alpha x)^{r+1}\alpha^{-\alpha x}dx$$

令 $\mu=\alpha x$　　$du=\alpha\,dx$　　$dx=\frac{1}{\alpha}du$

$$E(X^2)=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty\mu^{r+1}e^{-\mu}du$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\Gamma(r)}\Gamma(r+2)$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}r(r+1)$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}r(r+1)-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2=\frac{r}{\alpha^2}$$

〔別解〕: *X Can be expressed as* $X=X^1+X_2+\cdots\cdots+X_v$ *each* X_i *is independent and has some exponential distribution*

$$E(X)=E(X_1)+\cdots\cdots+E(X_v)=\frac{r}{\alpha}$$

$$V(X)=V(X_1)+\cdots\cdots+V(X_r)=\frac{r}{\alpha^2}$$

9－21

【解】 (a)令 $q=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma^2}\right)^2\right]$ ……………………(1)

則 $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{q}{2}}$ ……………………………… (2)

令 $b=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$

由(1)得 $(1-\rho^2)q=\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2+(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$

$$=\left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2+(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

代入(2)得 $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$

$$= \frac{exp\left[\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp\left\{\frac{-(y-b)^2}{[2\sigma_2^2(1-\rho^2)]}\right\}}{\sigma^2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{2\pi}} dy \cdots\cdots\cdots(3)$$

此式後者爲均數爲 b ，變異數爲 $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ 之常態分配。

$$\therefore f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

同理 $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

(c)由(3)得

$$f(x, y) = f_1(x)\left\{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right]\right\}$$

$$\therefore f(y \mid x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\sigma_2}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right]$$

$$i.e. \quad f(y \mid x) \sim N(b, \sigma_2^2(1-\rho^2)) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(b)由(4) $E(Y \mid X) = b = \mu_2 + \rho\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)(x-\mu_1)$

由定理7－17（習題7－44）知 ρ 爲 X，Y 之相關係數。

9－22

【解】 $Z = f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}q}$

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

由習題9－21知

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y-b}{\sigma_2}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$-\left(\frac{y-b}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^3 + \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

(a) $Z = C$

$$\therefore e^{-\frac{q}{2}} = 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\sigma^2}\,C$$

$\therefore q = (-2)\,ln\,(2\pi\sigma_1\sigma_2 C(\sqrt{1-\rho^2}))$ 常數

即 $\left(\frac{y-b}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 =$ 常數………⊙

故 $\{(x, y) \mid x, y \in ⊙\}$ 爲橢圓

(b) $\rho = 0$，$\sigma_1 = \sigma_2$ 代入⊙

得 $\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_2}\right)^2 =$ 常數：爲圓

又 $\rho \to \pm 1$ 則圖形→直線

9－23

【解】 (a) $P(a < X < b) = 0.85$

$P(X < b) - P(X < a) = 0.85$

令 $P(X < b) = 0.9$ $\quad P(X < a) = 0.05$

則由 Table．5 知 $\quad b = 15.987$

$a = 3.94$

若令 $P(X < b) = 0.95$ $\quad P(X < a) = 0.1$

則由 Table．5 知 $\quad b = 18.307$

$a = 4.865$

(b)僅有唯一之解滿足所予條件

$P(X < b) - P(X < a) = 0.85$ ……………………(1)

$P(X < a) = 1 - P(X < b)$

$\therefore P(X < b) + P(X < a) = 1$ ……………(2)

由(1)，(2)得 $\quad P(X < b) = 0.925$

$P(X < a) = 0.075$

由附錄之 Table．5 知

$$b = \frac{15.987 + 18.307}{2} = 17.147$$

$$a = \frac{3.94 + 4.865}{2} = 4.4025$$

9－24

【解】 速度 V 有 $N(0, 25)$ 的分配

令 $V' = \frac{V}{5}$ 則 V' 有 $N(0, 1)$ 的分配

$K = \frac{1}{2} 1000 V^2 = 500 V^2 = 12500 V'^2$

故 K 爲自由度爲 1 的卡方分配（見 p．197）

$$P(K < 200) = P\left(V'^2 < \frac{200}{12500}\right)$$

$$= P(V'^2 < 0.016)$$

$$= P(-0.1265 < V' < 0.1265)$$

$$= P(V' < 0.1265) - P(V' < -0.1265)$$
$$= \Phi(0.1265) - \Phi(-0.1265)$$
$$= 2\Phi(0.1265) - 1$$
$$= 2 \times 0.55 - 1 = 0.1$$

$$P(K > 800) = 1 - p\left(V'^2 < \frac{800}{12500}\right)$$
$$= 1 - p(V'^2 < 0.064)$$
$$= 1 - p(-0.253 < V' < 0.253)$$
$$= 1 - [\Phi(0.253) - \Phi(-0.253)]$$
$$= 2 - 2\Phi(0.253)$$
$$= 2 - 2 \times 0.5987 = 0.8026$$

9－25

【解】 X有$N(\mu, \sigma^2)$的分配

$E(X) = \mu$　　　　$\sigma x = \sigma$

$Y = H(X) = \ln X$

$H'(X) = \frac{1}{x}$　　　　$H''(X) = -\frac{1}{x^2}$

$$E(Y) = H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2 = \ln\mu + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\mu^2}\right)\sigma^2$$
$$= \ln\mu \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$$

$$V(Y) = [H'(\mu)]^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

9－26

【解】令X *has a normal distribution truncated to the right of* τ

$\therefore f(x) = 0$　　　　若$x \geq \tau$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma e})^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{\sigma}\right)^2\right)} \times \frac{1}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}$$　　若$x \leq \tau$

$$\therefore E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$
$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

令$S = \frac{x-\mu}{\sigma}$　　　　$\therefore x = \mu + \sigma s$

$$E(X)=\frac{1}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\tau-\mu}{\sigma}}(s\sigma+\mu)e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

$$=\frac{1}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}\left[\mu\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)+\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\tau-\mu}{\sigma}}se^{-\frac{s^2}{2}}ds\right]$$

$$=\mu+\frac{\sigma}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}(-1)\Big|_{-\infty}^{\frac{\tau-\mu}{\sigma}}$$

$$=\mu-\frac{\sigma}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{2}\right)^2}$$

The function Φ is the usual cdf of distribution $N(0.1)$ whtle $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$ is the ordinate of the pdf of $N(0.1)$ and is also tabulate

9－27

【解】 *X has exponutial distribution truncated to the left at $X=\tau$*

$\therefore f(x)=0 \qquad\qquad if \quad x<r$

$\quad = e^{\alpha r}\alpha e^{-\alpha r} \qquad if \quad x\geq r$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_{r}^{\infty}xe^{\alpha r}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$=\alpha e^{\alpha r}\int_{r}^{\infty}xe^{-\alpha x}dx=\alpha e^{\alpha r}\left[-\frac{1}{\alpha}xe^{-\alpha x}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x}\Big|_{r}^{\infty}\right]$$

$$=\alpha e^{\alpha r}\left[\frac{1}{\alpha}re^{-\alpha r}+\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha r}\right]=\frac{\alpha r+1}{\alpha}$$

9－28

【解】 (a)*X has binomial distribution with parameter n truncated to the right of $X=n$*

$P(X=n)=0$

$P(X=k)=c\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1\ldots\ldots n-1$

$\because \sum_{k=0}^{n-1}c\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1$

$c\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1$

又 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$　　(*binormial distribution*)

$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + p^n = 1$

$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - p^n$

$\because c = \dfrac{1}{1-p^n}$

$\therefore P(X=k) = \dfrac{1}{1-p^n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$　　$k = 0, 1 \ldots\ldots n-1$

(b) $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} kp(x=k)$

$= c\left[\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} - np^n\right]$

$= c\left[np - np^n\right]$

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 p(x=k^2) = c\left[\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} - np^n\right]$

$= c\left[n^2p^2 + npq - n^2p^n\right]$

$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

$= e\left[n^2p^2 + npq - n^2p^n\right] - \left[c(np - np^n)\right]^2$

9－29

【解】 $E(X) = \mu$　　　　$V(X) = \sigma^2$

X truncated to the left of $X = \tau$

and truncated to the night of $X = r$

$f(x) = K\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$　　　$\tau < X < r$

$= 0$　　　　其他

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$I = \int_{\tau}^{r} K\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$

令　$S = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$　　　　$\therefore x = \mu + \sigma s$

$I = \dfrac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\tau-\mu}{\sigma}}^{\frac{r-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$

$$= K \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\gamma-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right]$$

by 9 − 3

$$I = K \left[\Phi\left(\frac{\gamma = \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right) \right] = 1$$

$$\therefore K = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\gamma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)}$$

故 *pdf of X is*

$$f(x) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{\gamma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{if } \tau < X < \gamma$$

$$= 0 \qquad \text{else where}$$

9 − 30

【解】 棒子的長度X有$N(10, 2)$的分配

令$X_s = \frac{X-10}{\sqrt{2}}$則$X_s$爲分配$N(0, 1)$

$$\therefore P(X < 8) = p\left(\frac{X-10}{\sqrt{2}} < \frac{8-10}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= p(X_s < -\sqrt{2} = \Phi(-\sqrt{2})$$

$$= 0.0793$$

$$P(8 < X < 12) = p\left(\frac{8-10}{\sqrt{2}} < \frac{X-10}{\sqrt{2}} < \frac{12-10}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= p(X_s < \sqrt{2}) - p(X_s < -\sqrt{2})$$

$$= \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2})$$

$$= 0.8414$$

$$P(X \geq 12) = 1 - 0.0793 - 0.8414$$

$$= 0.0793$$

故所求的概率爲

$$P = \frac{15!}{5!5!5!} (0.0793)^5 (0.0793)^5 (0.8414)^5$$

9 − 31

【解】 $P(X < x) = 0.95$

$$P\left(\frac{X-29.5}{2.5} < \frac{x-29.5}{2.5}\right) = 0.95$$

$\Phi(\frac{x-29.5}{2.5})=0.95$

查表得 $\frac{x-29.5}{2.5}=1.65$

$\therefore x-29.5=4.125 \qquad x=33.625$

9－32

【解】 X有$N(0 \cdot 25)$的分配

令$X_t=\frac{x}{5}$，則X_t有$N(0,1)$的分配

$$
\begin{aligned}
P(1<X^2<4) &= p(X^2<4)-p(X^2<1) \\
&= p(-2<X<2)-p(-1<X<1) \\
&= p(\frac{x}{5}<\frac{2}{5})-p(\frac{x}{5}<\frac{-2}{5})-[p(\frac{x}{5}<\frac{1}{5}) \\
&\quad +p(\frac{x}{5}<\frac{-1}{5})] \\
&= \Phi(0.4)-\Phi(0.4)-\Phi(0.2)+\Phi(-0.2) \\
&= 0.6554-0.3446-0.5793+0.4207 \\
&= 0.1522
\end{aligned}
$$

9－33

【解】 $P(x=k)=\frac{e^{-\beta t}(\beta t)^k}{k!}$

T : *The Number of hour until the first emission The event* $(T>t)$ *is eguivalent to the event* $(x=0$ *in* t *hours* $)$

$P(T>t)=P(x=0)=e^{-\beta t}$

$P(T\leq t)=1-e^{-\beta t}$

$\therefore$ *cdf of T is* $F(t)=1-e^{-\beta t}$

pdf of T is $f(t)=\beta e^{-\beta t}$

故T為參數B的指數分配

9－34

【解】 由前題

$P_T(T>t)=P_{X_t}^{I}(x=0)=e^{-\beta t}$

(a) $t=5$ 分

$P_T(T>\frac{5}{60})=e^{-30\frac{5}{60}}=e^{-\frac{5}{2}}$

(b) $t=10$ 分

$$P_T\left(T>\frac{10}{60}\right)=e^{-30\frac{10}{60}}=e^{-5}$$

(c) $t=30$ 秒

$$P_T\left(T>\frac{30}{3600}\right)=e^{-30\frac{30}{3600}}=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$P_T\left(T<\frac{10}{3600}\right)=1-e^{-\frac{1}{4}}$$

9−35

【解】 (a) $H(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X有$N(1,4)$的分配

$\therefore X_s=\dfrac{x-1}{2}$ 有$N(0,1)$的分配

又 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{1}{2}$

若$x>0$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}+H(x)$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)=\frac{1}{2}-H(x)$$

$$\begin{aligned}P[\,|X|>2\,]&=p(x>2)+p(x<-2)\\&=p\left(\frac{x-1}{2}>\frac{2-1}{2}\right)+p\left(\frac{x-1}{2}<\frac{-2-1}{2}\right)\\&=1-p(x_s<0.5)+p(x_s<-1.5)\\&=1-\Phi(0.5)+\Phi(-1.5)\\&=1-\left[\frac{1}{2}+H(0.5)\right]+\frac{1}{2}-H(1.5)\\&=1-H(0.5)-H(1.5)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}P[X<0]&=p\left[\frac{x-1}{2}<\frac{-1}{2}\right]\\&=p[x_s<-0.5]=\Phi[-0.5]\\&=\frac{1}{2}-H(0.5)\end{aligned}$$

9－36

【解】 略

9－37

【解】 (a)令 x_t 表在 t 時間內 *accident* 發生的次數。

則 x_t 爲卜氏分配 $\lambda = 2$ (*perweek*)

令 T 表二次 *accident* 之間隔時間

則由卜氏程序之假設(2)知 *accident* 之發生數目僅與時間的長度有關。

則間隔時間大於 3 天，即表示在 3 天內 *accident* 發生的次數爲 0 ，

$\therefore t = 3$

$$P(T>3) = P(x_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\frac{2}{7}\times 3} = e^{-0.857} = 0.424$$

〔另解(a)〕：令 T 表二次 *accident* 之間隔

則由卜氏程序之假設(2)知 T 具指數分配參數 $\lambda = \frac{2}{7}$ 。

$$\therefore P(T>3) = e^{-\lambda 3} = e^{-\frac{6}{7}} = 0.424$$

(b) 1 *th accident* 與 3 *nd accident* 之間隔時間大於一星明，即在時間 $t = 7$ 內 *accident* 發生的次數小於 2 次

$$P(T>7) = P(x_t = 0) + P(x_t = 1)$$

$$= e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\frac{2}{7}\times 7}(1 + \frac{2}{7}\times 7)$$

$$= 3\times e^{-2} = 3\times 0.135 = 0.405$$

〔另解(b)〕：若 T 表第一與第三次 *accident* 之間隔時間，則爲

gammadistribution 參數 $\lambda \pm \frac{2}{7}$，$\gamma = 2$

$$P(T>7) = 1 - P(T<7)$$

$$= 1 - \int_0^7 \frac{\alpha}{\Gamma(2)}(\alpha x)\, e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= 1 - \frac{2}{7}\int_0^7 (\frac{2}{7})\, e^{-\frac{2}{7}x}\, dx$$

$$= 1 - \frac{4}{49}\int_0^7 x e^{-\frac{2}{7}x}\, dx$$

$$= -3\, e^{-2} = 0.405$$

9－38

【解】 X：表生產之個數，Y：*defective* 3 個數

(a) $P(X<1000 \mid Y=3) = P(Y\geq 3 \mid X=999)$

$$= 1 - p(Y < 3)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-(\frac{999}{300})}(\frac{900}{300})^k}{k!}$$

(b) $P(X = 1000 \mid Y = 3) = P(Y = 2 \mid X = 999) \times \frac{1}{300}$

$$= \frac{e^{-\frac{999}{300}} \times (\frac{999}{300})^2}{2!} \times \frac{1}{300}$$

(c) $P(X > 1000 \mid Y = 3) = P(Y < 3 \mid X = 1000)$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-(\frac{999}{300})} \times (\frac{999}{300})^k}{k!}$$

第十章　動差母函數
(The Moment-Generating Function)

§10—1　導論　(Introduction)

本章我們將介紹一些應用到我們所考慮的〝機率模式〞(probabilistic models)上重要數理概念。為了能夠在這方面有一嚴密性的擴展，所以這裡需要運用到較深的數學。然而，假如我們能避開一些導致困難的數學問題以及採用某些有效的運算技巧，那麼我們將可獲得一個易於使用且易於理解的觀念。

為了提高往後的學習興趣，讓我們先回憶一下前面所述的〝對數〞(logarithm)性質。在此，對數完全是當為一種輔助運算的工具而已。對任一正實數 x，吾人可將其對映到一 $log\,x$（而 $log\,x$ 的值可由後查表得）。例如為了計算 xy，吾人可先由 $log\,x$ 和 $log\,y$ 計算出 $log\,x+log\,y$ 用來代表 $log\,xy$，然後再由表回查得 xy。下述理由促使上述方法被廣泛運用。

(a)對任一正數 x 有一 $log\,x$ 與之對映，而且 $log\,x$ 易由表查得。

(b) x 與 $log\,x$ 間為一對一之對映關係。

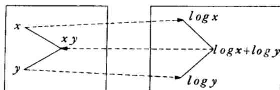


圖 10 − 1

(c)在含有 xy 或 $\frac{x}{y}$ 的乘除運算時，我們可〝換算〞(transformed)為 $log\,x$，$log\,y$ 的加、減所取代。（見圖 10 − 1）

§10—2　動差母函數　(M.G.F)

現在讓我們來考慮一種較繁複的情況。假設 X 為一隨機變數，即 X 為一由樣本空間對映到實數的函數。在計算隨機變數 X 的各種特性，如 $E(x)$ 或 $V(x)$，吾人即可直接由 X 的機率分配下手〔這機率分配是一已知的函數，不管它為連續型或離散型〕。我們亦可介紹一些其他的函數。首先，將 MGF 下個定義。

【定義】

若 X 為具有機率分配 $P(x_i)=p(X=x_i)$，$i=1,2\cdots\cdots$ 之離散隨機變數，則函數 M_X 稱為 X 的動差母函數（Moment generating function）其定義為

$$M_X(t)=\sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j}\,p(x_j) \qquad (10-1)$$

若X為具有 pdf $f(x)$之連續隨機變數

其定義為

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \qquad (10-2)$$

【附註】

(a)不管是連續或離散型，$M_X(t)$是為e^{tX}之期望值

表為 $M_X(t)=E(e^{tX})$ (10－3)

(b)$M_X(t)$為函數M_X隨變數t而定之值。而X則依隨機變數而定。假如我們欲探討X及Y隨機變數，則它的動差母函數則分別為M_X和M_Y。

(c)以mgf代表動差母函數(Moment generating function)。

(d)上述之mgf定義均為無窮級數(或積分)，而在此範圍內並非所有級數(或積分)皆能存在(如果此非收斂級數則不存在)。但目前吾人暫且不考慮這可能碰到的困難，而假設我們所用的都存在。

(e)特性函數C_x(characteristic function)和mgf有密切的關係。其定義為$C_x(t)=E(e^{itX})$。理論上，以$C_x(t)$來取代$M_X(t)$應相當有益，但因其計算須運用到複數(complex number)，所以在此不擬加以討論。

§10－3 動差母函數範例

【例題10－1】 假設X在區間〔a，b〕內為均勻分配(uniformly distributed)則其mgf為

$$M_X(t)=\int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{(b-a)t}\left[e^{bt}-e^{at}\right] \qquad t\neq 0 \qquad (10-4)$$

【例題10－2】 假設X為參數n與P之二項分配(binomially, distributed)則

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\left[pe^t+(1-p)\right]^n \qquad (10-5)$$

【例題10－3】 假設X為參數λ之卜瓦松分配(poisson distribution)則

$$M_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)} \qquad (10-6)$$

分析：$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ 則得第三恒等式

【例題10－4】　假設X爲參數α之指數分配（exponential distribution）則

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \alpha e^{-\alpha x} \, dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{x(t-\alpha)} dx$$

上式只有在$t < \alpha$時mgf才存在（積分才收斂），而吾人假設其滿足此條件，所以

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{x(t-\alpha)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha - t} \quad , \qquad t < \alpha \qquad (10-7)$$

【注意】　因爲mgf是X的期望值，吾人亦可由隨機變數的函數來獲得mgf而不必由其本身的機率分配去求。

例：X爲$N(0, 1)$而假如$Y = X^2$

則　$M_Y(t) = E(e^{ty}) = E(e^{tx^2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(tx^2 - \frac{x^2}{2}) dx$$

$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

直接積分可求得，而不必先求得Y的pdf。

【例題10－5】　假設X的分配爲$N(\mu, a^2)$

則
$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \, exp(-\frac{1}{2}[\frac{x-\mu}{\lambda}]^2) \, dx$$

令$(x-\mu)/\lambda = s$；所以$x = \lambda s + \mu$，而$dx = \lambda ds$

得
$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp[t(\sigma s + \mu)] e^{-\frac{s^2}{2}} d_s$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{1}{2}[s^2 - 2\sigma t s]) ds$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\{-\frac{1}{2}[(s-\sigma t)^2 - \sigma^2 t^2]\} ds$$

$$\equiv e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{1}{2}[s - \sigma t]^2) ds$$

令$s - \sigma t = v$；所以$ds = dv$

得 $M_X(t)=e^{t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$

$$=e^{(t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2})} \qquad (10-8)$$

【例題 10－6】 設X為參數α和r之伽瑪分配（Gamma distuibution）

則

$$M_X(t)=\frac{\alpha}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}e^{tx}\ (dx)^{r-1}e^{-\alpha x}dx$$

$$=\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}x^{r-1}e^{-x(\alpha-t)}dx \qquad \text{（如}\alpha>t\text{ 則此積分收歛）}$$

令 $x(\alpha-t)=\mu$ ； 所以 $dx=\dfrac{d\mu}{\alpha-t}$

得

$$M_X(t)=\frac{\alpha^r}{(\alpha-t)\Gamma(r)}\int_0^{\infty}\left(\frac{\mu}{\alpha-t}\right)^{r-1}e^{-\mu}d\mu$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}\mu^{r-1}e^{-\mu}d\mu$$

因為 $\int_0^{\infty}\mu^{r-1}e^{-\mu}d\mu=\Gamma(r)$

所以 $M_X(t)=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r \qquad (10-9)$

【注意】 (a)假如 $r=1$ 則伽瑪分配稱為指數分配。

(b)若 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 且 $r=\dfrac{n}{2}$（n 為正整數）的伽瑪分配（Gamma dis.）

稱為卡方分配（chi-square distribution）。

如Z的分配為χ_n^2 則$M_Z(t)=(1-2t)^{-n/2}$ (10–10)

§10—4 動差母函數的性質 (Properties of the Moment -Generating Function)

現在吾人來闡述一下推導M_X動差母函數的原由。首先，讓我們回憶麥克羅林級數的展開式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

已知本級數對任何 x 值均為收斂

所以 $e^{tx}=1+tx+\dfrac{(tx)^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{(tx)^n}{n!}+\cdots\cdots$

而$M_X(t)=E(e^{tx})=E\left(1+tx+\dfrac{(tx)^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{(tx)^n}{n!}+\cdots\cdots\right)$

在有限數內，個別期望值的和等於總和的期望值，這在前面已經證明過，然

而，這一結果亦可應用到無限級數。如 t 為常數則

$$M_X(t)=1+tE(X)+\frac{t^2E(X^2)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{t^nE(X^n)}{n!}+\cdots\cdots$$

因 M_X 為實變數 t 的函數，所以吾人可對 t 微分得 $M_X(t)$ 的導數，即 $M'(t)=\frac{d}{dt}M_X(t)$ 而有限和的導數等於導數的和。可是，對無限數的和則並非皆如此；為了合理的使用這個運算必須滿足某些條件。在此吾人只假設它的有效性

所以

$$M_X'(t)=E(X)+tE(X^2)+\frac{t^2E(X^3)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{t^{n-1}E(X^n)}{(n-1)!}\cdots\cdots$$

令 $t=0$　則可得

$$M'(0)=E(X)$$

所以當 $t=0$ 這mgf 的第一次導函數將為隨機變數 X 的期望值。而

$$M_X''(t)=E(X^2)+tE(X^3)+\cdots\cdots+\frac{t^{n-2}E(X^n)}{(n-2)!}+\cdots\cdots$$

令 $t=0$　則

$$M''(0)=E(X^2)$$

以下類推而有下述定理

【定理 10－1】

$$M^{(n)}(0)=E(X^n)$$

亦即 $M_X(t)$ 在 $t=0$ 之第 n 次導數為 $E(X^n)$

【要義】 (a) $E(X^n)$ 稱為隨機變數 X 以原點為中心之 n 級動差

(b) 馬氏級數（Maclacurin Series）展開式，

$$h(t)=h(0)+h'(0)t+\frac{h''(0)t^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{h^{(n)}(0)t^n}{n!}+\cdots\cdots$$

其中 $h^{(n)}(0)$ 為 $t=0$ 時之 h 函數的 n 階導數

$$M_X(t)=M_X(0)+M_X'(0)t+\frac{M_X''(0)t^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{M_X^n(0)t^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$=1+\mu_1t+\mu_2t^2/2!+\cdots\cdots+\frac{\mu_nt^n}{n!}+\cdots\cdots$$

其中　$\mu_i=E(X^i)$，$i=1,2,\cdots\cdots\cdots$

(c) $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=M''(0)-[M'(0)]^2$

【例題 10－7】 設 X 為母數 n 與 p 的二項分配

由例 10－2 知 $M_X(t)=[pe^t+q]^n$

所以 $M'(t)=n(pe^t+q)^{n-1}pe^t$

$$M''(t)=np[e^t(n-1)(pe^t+q)^{n-2}pe^t+(pe^t+q)^{n-1}e^t]$$

所以 $E(X) = M'(0) = np$ 符合先前的結果

且 $E(X^2) = M''(0) = np[(n-1)p+1]$

所以 $V(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = np(1-p)$ 亦合於前述

【例題 10－8】

設 X 的分配為 $N(\alpha, \beta^2)$

由例 10－5 知 $M_x(t) = exp(\alpha t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2) = e^{(\alpha t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2)}$

所以 $M'(t) = e^{\alpha t + \frac{\beta^2 t^2}{2}}(\beta^2 t + \alpha)$

$$M''(t) = e^{\frac{\beta^2 t^2}{2} + \alpha t}\beta^2 + (\beta^2 t + \alpha)^2 e^{\frac{\beta^2 t^2}{2} + \alpha t}$$

而 $M'(0) = \alpha$ $M''(0) = \beta^2 + \alpha^2$

所以 $E(X) = \alpha$ $V(X) = M''(0) - [M'(0)]^2$

$= \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 = \beta^2$

【例題 10－9】 設 X 為一幾何機率分配（geometric probability distribution）

即 $p(X=k) = pq^{k-1}$ $k = 1, 2\cdots\cdots$

$p + q = 1$

所以

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} q^{k-1} p = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qe^t)^k$$

假如限定 t 值於 $0 < qe^t < 1$ 〔即 $t < ln(\frac{1}{q})$〕

則上式為

$$M_X(t) = \frac{p}{q}q^t[1 + qe^t + (qe^t)^2 + \cdots\cdots]$$

$$= \frac{p}{q}\frac{qe^t}{1-qe^t} = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

導數

$$M'(t) = \frac{(1-qe^t)pe^t - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$$

$$M''(t) = \frac{(1-qe^t)^2 pe^t - pe^t 2(1-qe^t)(-qe^t)}{(1-qe^t)^4}$$

$$= \frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}$$

所以 $E(X) = M'(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

$$E(X^2)=M''(0)=p(1+q)/(1-q)^3=\frac{1+q}{p^2}$$

得　$V(X)=(1+q)/p^2-(\frac{1}{p})^2=\frac{q}{p^2}$

下述兩定理在 mgf 的應用上特別重要

【定理 **10－2**】

設隨機變數 X 的 mgf 爲 M_X 令 $Y=\alpha X+\beta$

則隨機變數 Y 的 mgf M_Y 爲

$M_Y(t)=e^{\beta t}M_X(\alpha t)$

【證明】

$$M_Y(t)=E(e^{Yt})=E[e^{(\alpha X+\beta)t}]$$
$$=e^{\beta t}E[e^{\alpha tX}]$$
$$=e^{\beta t}M_X(\alpha t)$$

【定理 **10－3**】　設 $M_X(t)$ 與 $M_Y(t)$ 分別表隨機變數 X 與 Y 的 mgf

若 $M_X(t)=M_Y(t)$　　　　t 爲任意值

則 X 與 Y 必有相同的機率分配

【證明】　由於此式的證明較難，故略之。

【例題 **10－10**】

設 X 爲 $N(\mu,\sigma^2)$ 之分配，令 $Y=\alpha X+\beta$

則 Y 亦仍爲常態分配

由定 10－2 知 Y 的 mgf 爲 $M_Y(t)=e^{\beta t}M_X(\alpha t)$

然而由例 10－8 知 $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

所以　$M_Y(t)=e^{\beta t}[e^{\alpha\mu t+(\alpha\sigma^2)t^2/2}]$

$$=e^{(\beta+\alpha\mu)t}e^{(\alpha\sigma)^2t^2/2}$$

但因這爲以 $\alpha\mu+\beta$ 爲期望値 $\alpha^2\sigma^2$ 爲變異數（Variance）的常態分配，所以依定 10－3 知 Y 的分配亦爲常態。

【定理 **10－4**】　設 X 和 Y 爲彼此獨立的隨機變數，令 $Z=X+Y$ 且 $M_X(t)$，$M_Y(t)$ 和 $M_Z(t)$ 分別爲 X，Y，Z 的隨機變數

則　$M_Z(t)=M_X(t)M_Y(t)$

【證明】　$M_Z(t)=E(e^{Zt})=E[e^{(X+Y)t}]=E(e^{Xt}e^{Yt})$

$$=E(e^{Xt})E(e^{Yt})$$
$$=M_X(t)M_Y(t)$$

本定理在往後的統計領域中將扮演相當重要的角色。

【定義】：本定理亦可演繹爲，如 X_1，$X_2\cdots\cdots X_n$ 爲彼此獨立隨機變數

M_{X_i}，$i=1,2,\cdots\cdots n$ 其其 mgf

若 $Z=X_1+\cdots\cdots+X_n$

則$M_Z(t)=M_{X_1}(t)\cdots\cdots M_{X_n}(t)$

§10—5 再生性 (Reproductive Properties)

許多種機率分配均擁有這相當有用的性質。假如兩（或多）彼此獨立的隨機變數將其分配相加，則其隨機變數和亦仍爲原來型類的分配。這種特性叫再生性。吾人將運用10－3，10－4定理以及本性質去建立一些重要的分配。

【例題10－11】 若X，Y爲彼此獨立的隨機變數，其常態分配分別爲$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，令$Z=X+Y$則

$$M_Z(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$$
$$=exp(\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2 t^2}{2})\ exp\ \sigma\ \mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 t^2}{2})$$
$$=exp[(\mu_1+\mu_2)t+\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}]$$

由於這爲平均數$\mu_1+\mu_2$變異數$\sigma_1^2+\sigma_2^2$常態分配的mgf所以可知Z亦爲常態分配。（參定理10－3）

【要義】 本來$E(Z)=\mu_1+\mu_2$，$V(Z)=\sigma_1^2+\sigma_2^2$可直接由先前的結果求得$Z$的期望值和變異數，但爲印證$Z$分配亦爲常態分配所以仍由$mgf$去求。

【例題10－12】 有長度平均數4吋變異數0.01吋^{2}的桿子，其隨機變數爲常態分配，今將兩桿連接以使伸入孔內而孔的長度爲8吋且公差爲±0.1吋，試問這兩枝桿子能適合孔長的機率？

令L_1，L_2表桿1，2之桿長

則$L_1+L_2=L$爲常態分配，且$E(L)=8$吋，$V(L)=0.02$

所以 $p(7.9\leq L\leq 8.1)=p(\frac{7.9-8}{0.14}\leq\frac{L-8}{0.14}\leq\frac{8.1-8}{0.14})$

$=\Phi(+0.714)-\Phi(-0.714)=0.526$

（由常態分配表查得）

【定理10－5】 （再生性的推廣）

如X_1，$X_2\cdots\cdots X_n$爲n個彼此獨立的隨機變數，其分配爲$N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1$，$2\cdots\cdots n$，如$Z=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$，則$Z$分配呈$N(\sum_{n=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$

【定理10－6】 （卜瓦松分配的再生性）

如$X_1\cdots\cdots X_n$爲彼此獨立的隨機變數，且假設X_i爲具有母數α_i，$i=1$，$2\cdots\cdots n$的卜瓦松分配（poisson distribution）如$Z=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$

則Z爲母數$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$的卜瓦松分配

【說明】 首先考慮$n=2$的情況

$M_{X_1}(t)=e^{\alpha_1(e^t-1)}$ $M_{X_2}(t)=e^{\alpha_2(e^t-1)}$

所以$M_Z(t)=e^{(\alpha_1+\alpha_2)(e^t-1)}$ 而這即為母數$\alpha_1+\alpha_2$卜瓦松分配的mgf。因此吾人可以引用數學歸納法來證明本定理。

【例題10－13】 設早上九點至十點打進電話總機的數目為X，其為母數等於3的卜瓦松分配，而本點至十一點為X_2，母數等於5的卜瓦松分配，若X_1，X_2彼此獨立，試問在早上九點到十一點打進的電話數超過5次的機率？

令$Z=X_1+X_2$由上定理知Z為母數8的卜瓦松分配所以

$$P(Z>5)=1-p(Z\leq 5)=1-\sum_{k=0}^{5}\frac{e^{-8}8^k}{K!}$$

$$=1-0.1912=0.8088$$

【定理10－7】 卡方分配的再生性（Reproductive property of Chi-square distribution）。

設X_i的分配為$\chi^2_{n_i}$，$i=1,2\cdots\cdots K$，而X_i為彼此獨立的隨機變數。

如$Z=X_1+X_2+\cdots\cdots\cdots+X_k$

則Z的分配為χ^2_n $\quad n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k$

【證明】 因$M_{X_i}(t)=(1-2t)^{-n_i/2}$，$i=1,2,\cdots\cdots k$

所以$M_Z(t)=M_{X_1}(t)\cdots\cdots M_{X_k}(t)=(1-2t)^{-(n_1+\cdots\cdots+n_k)/2}$

而這即為隨機變數有χ^2_n分配的mgf。

由例9－9吾人發現如X的分配為$N(0,1)$則X^2的分配為χ^2，綜合例9－9與定理10－7，吾人可得下面結果。

【定理10－8】 設彼此獨立的隨機變數$X_1\cdots\cdots X_k$每個的分配均為$N(0,1)$則$S=X_1^2+X_2^2+\cdots\cdots+X_k^2$的分配為$\chi^2_k$。

【例題10－14】 設$X_1\cdots\cdots X_n$為彼此獨立的隨機變數，每個的分配均為$N(0,1)$，如$T=\sqrt{X_1^2+\cdots\cdots+X_n^2}$，由前述的討論知$T^2$的分配為$\chi^2_n$。求$T$的$pdf$。

令h為T的pdf

$$H(t)=p(T\leq t)=p(T^2\leq t^2)$$

$$=\int_0^{t^2}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}dz$$

所以得$h(t)=H'(t)$

$$=\frac{2t}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}(t^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$=\frac{2t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad 如 \quad t \geq 0$$

【要義】 (a)如 $n=2$ 則上述分配稱爲雷烈分配（Rayleigh distribution）。

(b)如 $n=3$ 則上述分配稱爲馬克斯歐爾分配（Maxwell's distribution）。

（或稱馬克斯歐爾的速度分配Maxwell's velocity distribution）解說如下：設在一裝有氣體的密閉容器中，如（X，Y，Z）代表任一選定分子的速度分量，則吾人將假設X，Y與Z彼此獨立的隨機變數均爲$N(0,\sigma^2)$的分配。

吾人假設X，Y與Z均爲相同分配的物理意義爲這容器內的氣體在各方向所受的壓力相同。假設期望值爲零表示沒有氣流（gas flow）。

所以這分子的速度$S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$。

因$\frac{X}{\sigma}$，$\frac{Y}{\sigma}$與$\frac{Z}{\sigma}$均爲$N(0,1)$的分配，所以$\frac{s}{\sigma}=\sqrt{(\frac{X}{\sigma})^2+(\frac{Y}{\sigma})^2+(\frac{Z}{\sigma})^2}$

爲Maxwell's distribution。速度S的pdf爲

$$g(s)=\frac{2\sigma(\sigma s)^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}} \qquad s\geq 0$$

右圖 10－2 表示當$\sigma=2$的g函數圖。注意當s值很大和很小時有很大的區別。σ的物理意義爲

$$\sigma=\sqrt{\frac{KT}{M}}$$

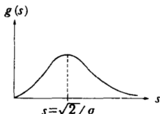


圖10－2

T：絕對溫度

K：波滋曼常數（Boltzmann's constant）

M：分子的質量

吾人已討論過數種有再生性質的分配，現在讓我們來考慮指數分配（exponential distribution）。嚴格的說，指數分配並沒有再生性，只能說稍微類似於再生性而已。

令X_i，$i=1,2\cdots\cdots r$爲彼此獨立的隨機變數，其母數爲α且均有相同的指數分配。由例（10－4）知

$$M_{X_i}(t)=\frac{\alpha}{(\alpha-t)}$$

如$Z=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_r$ 則$M_Z(t)=[\frac{\alpha}{\alpha-t}]^r$ 正是以α，r爲母數的

伽瑪分配的動差母函數（mgf），除非 $\gamma=1$ 否則此即非指數分配，所以這分配並沒有再生性。

【定理 10－9】　令 $Z=X_1+\cdots\cdots+X_n$，而 X_i 為 γ 個以 α 為母數，彼此獨立的隨機變數，每個均為指數分配，則 Z 呈以 α，γ 為母數的伽瑪分配。

【要義】　(a)當各指數分配的母數不同時則定理 10－9 即不存在。

(b)上述定理所得下列推論在統計學的應用是相當重要的。隨機變數 $W=2\alpha Z$ 為 $\chi^2_{2\gamma}$ 分配，即 $M_W(t)=M_Z(2\alpha t)=[\alpha/(\alpha-2\alpha t)]^\gamma=(1-2t)^{-2\gamma/2}$ 與公式（10－10）比較即得上述推論。

所以若欲估計某一 Z 的機率，吾人亦可用卡方分配表來查得，例如 $p(Z\leq 3)=p(2\alpha Z\leq 6\alpha)$。

當 γ，α 已知，則可直接由卡方分配表查得機率。

§10—6　隨機變數的數列 (Sequences of Random Variables)

設 X_1，$X_2\cdots\cdots X_n\cdots\cdots$ 為隨機變數的數列，每一隨機變數均有其累積分配函數（cdf）F_i，

$$F_i(t)=p(X_i\leq t)\quad,\quad i=1,2\cdots\cdots$$

當 F_i 的 $i\to\infty$ 時不知將會有何情況發生，常為吾人研究興趣的所在。是否有某一極限分配函數（limiting distribution function）F 能對映至某隨機變數 X 以便使得隨機變數 X_i 收斂於 X？答案是肯定的，在許多情況下，均可以很平常的步驟去決定出 F。

如隨機變數 X 的 n 個觀測值 X_1，$X_2\cdots\cdots X_n$，吾人可求其觀測值的算術平均數（mean of arithmetic）$\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2\cdots\cdots+X_n)$，$\overline{X_n}$ 仍為隨機變數，令 $\overline{F_n}$ 為 $\overline{X_n}$ 的 cdf 而當 n 的數自增大時 X_n 的機率分配將不知有何變化。似此極限現象的問題，下述定理將提供我們一解決的方法。

【定理 10－10】　如 $X_1\cdots\cdots X_n\cdots\cdots$ 為一隨機變數數列，其 cdf 為 F_1，$\cdots\cdots F_n\cdots\cdots$，$mgf$ 為 M_1，$\cdots\cdots M_n\cdots\cdots$ 已知 cdf 為 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(t)$，設 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n(t)=M(t)$，當 $M(0)=1$，則 $M(t)$ 為這隨機變數 X 的 mgf。



10－1　假設 X 的 pdf 是

$$f(x)=2x\ ,\quad 0\leq x\leq 1$$

(a) 決定 X 的 mgf。

(b) 利用 mgf 以求 $E(X)$ 和 $V(X)$ 且驗查你的答案。

10－2 (a) 如習題 7 － 2 的電壓（包含雜音 N），試求此電壓的 mgf。
(b) 利用 mgf 求此電壓的期望值和變異數。

10－3 假設 X 的 pdf 是

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)} \quad , \quad x \geq a$$

（此稱為二參數指數分配）
(a) 求 X 的 mgf。
(b) 利用 mgf 求 $E(X)$ 和 $V(X)$。

10－4 令 X 表投擲一枚公正骰子出現的結果。
(a) 求 X 的 mgf。
(b) 利用 mgf 以求 $E(X)$ 和 $V(X)$。

10－5 求習題 6 － 7 之隨機變數 X 的 mgf 再求 $E(X)$ 和 $V(X)$。

10－6 假設連續隨機變數 X 的 pdf 是

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

(a) 求 X 的 mgf。
(b) 利用 mgf 求 $E(X)$ 和 $V(X)$。

10－7 利用 mgf 證明如果 X 和 Y 是獨立隨機變數且分別有分配 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$，$N(\mu_y, \sigma_y^2)$，則 $Z = aX + bY$ 也是常態分配，（這兒的 a，b 是常數）。

10－8 假設 X 的 mgf 是

$$M_X(t) = (0.4e^t + 0.6)^8$$

(a) $Y = 3X + 2$ 之 mgf 是什麼？
(b) 計算 $E(X)$。
(c) 你能利用其他方法查驗(b)的答案嗎？

10－9 幾個電阻器 R_i，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ 串聯裝入一電路，假設每個電阻是常態分配且 $E(R_i) = 10$ 歐姆，$V(R_i) = 0.16$。
(a) 如果 $n = 5$，問電阻超過 49 歐姆的機率為何？
(b) 問 n 要多大才能使得總電阻超過 100 歐姆的機率大約是 0.05。

10－10 假設 n 個電阻器串聯，每個電阻均勻分配在〔0，1〕上，又假設所有電阻器是獨立的。令 R 表總電阻。
(a) 求 R 的 mgf。
(b) 利用 mgf 求 $E(R)$ 和 $V(R)$，直接計算以查驗你的答案。

10－11 如果 X 有分配 χ_n^2，利用 mgf 證明 $E(X) = n$，且 $V(X) = 2n$.

10－12 假設一物體的速度 V（cm/sec）有分配 $N(0, 4)$，如果 $K = mV^2/2$（ergs）是物體的動能，求 K 的 pdf。如果 $m = 10(g)$，計算 $P(K \leq 3)$。

10－13 假設某物品的壽命有參數是 0.5 的指數分配，假設 10 件這種物品連

續地被安裝使得第 i 件在第（ $i-1$ ）件失效時立即被安裝；令 T_i 表到第 i 件失效的時間，$i=1,2,\cdots\cdots,10$。因此 $S=T_1+T_2+\cdots\cdots+T_{10}$ 代表物品的總壽命。假設這些 T_i 是獨立的，試求 $P(S\geq 15.5)$ 之值。

10－14 假設 $X_1,\cdots\cdots,X_{80}$ 是獨立隨機變數，每個均有分配 $N(0,1)$，試求 $P(X_1^2+\cdots\cdots+X_{80}^2>77)$ 之值。（hint 利用定理9．2）。

10－15 證明如果 X_i，$i=1,2,\cdots\cdots k$ 代表在 n_i 次重複試驗中成功的次數，而且對所有的 i 而言，成功的機率 $=p$，則 $X_1+\cdots\cdots+X_k$ 有二項式分配。

（亦即二項式分配有再生性質）。

10－16 （卜瓦松和多項式分配）假設 X_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$．是 n 個獨立隨機變數，每個有參數是 α_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$ 的卜瓦松分配，令 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，則給定 $X=x$ 時，$X_1,\cdots\cdots,X_n$ 之聯合條件機率分配是多項式分配。亦即

$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots\cdots,X_n=x_n\mid X=x)$

$=x!/(x_1!x_2!\cdots\cdots x_n!)(\alpha_1/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)^{x_1}\cdots\cdots$

$(\alpha_n/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)^{x_1}$

10－17 試求幾何分配隨機變數的 mgf。在加法運算下此分配是否有再生性質？

10－18 如果 X 的 mgf $M_X(t)=3/(3-t)$，試求 X 的標準差。

10－19 如果 X 均勻分配在（ -1，2 ）上，求其 mgf



10－1

解：　$f(x)=2x$　　　　$0\leq x\leq 1$

$$\text{(a)}M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)\,dx=\int_0^1 e^{tx}\,2x\,dx$$

令　$u=x$　　　　$dv=e^{tx}\,dx$

$du=dx$　　　　$v=\frac{1}{t}e^{tx}$

$$M_x(t)=2\left[\frac{x}{t}e^{tx}-\frac{1}{t}\int e^{tx}\,dx\Big|_0^1\right]$$

$$=2\left[\frac{x}{t}e^{tx}-\frac{}{t^2}e^{tx}\Big|_0^1\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{t}e^{t}-\frac{1}{t^2}e^{t}+\frac{1}{t^2}\right]$$

$$=\frac{2}{t^2}\left[e^{t}(t-1)+1\right]$$

(b) $E(X)=M'(0)$

$$M_x'(t)=\frac{-4}{t^3}\left[e^t(t-1)+1\right]+\frac{2}{t^2}\left[e^t(t-1)+e^t\right]$$

$$=\frac{-4\left[te^t-e^t+1\right]}{t^3}+\frac{2te^t}{t^3}$$

$$=\frac{-4(te^t-e^t+1)+2t^2e^t}{t^3}$$

$$\therefore M_x'(0)=\lim_{t\to\infty}\frac{-4(te^t-e^t+1)+2t^2e^t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4(te^t+e^t-e^t)+2t^2e^t+4te^t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2e^t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2e^t+4te^t+4te^t+4e^t}{6}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$E(X)=\frac{2}{3}$ 同理 $E(X^2)=M''(0)=\frac{1}{2}$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

10－2

解： S : suniformly distribution over $(0, 1)$

$f(s)=1 \qquad 0<s<1$

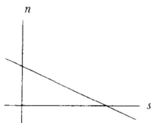
N : Suniformly distributed over $(0, 2)$

$g(n)=\frac{1}{2} \qquad 0<n<2$

$S'=S+N$

The c.d.f of S'

$$H(s') = P(S' \leq s')$$
$$= P(S' + N \leq s')$$
$$= \int_R \int f(s)\, g(n)\, ds\, dn$$



$$H(s') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s'-s} f(s)\, g(n)\, ds\, dn$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_{-\infty}^{s'-s} g(n)\, dn \right] ds$$

$R = \{ (s, n) \mid s + n \leq s' \}$

對 s' 微分

$$h(s') = H'(s') = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(s' - s)\, ds$$

$$h(s') = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \frac{1}{2} ds$$

$0 < s < 1$ ……①　　　　$\therefore$　$0 < s < 1$

$0 < s' - s < 2$ ……②　　　　$s' - 2 < s < s'$

得(1) if　$0 < s' < 1$　　則 $h(s') = \int_0^{s'} \frac{1}{2} ds' = \frac{1}{2} s'$

(2) if　$1 < s' < 2$　　則 $h(s') = \int_0^{1} \frac{1}{2} ds' = \frac{1}{2}$

(3) if　$2 < s' < 3$　　則 $s' - 2 > 0$

$$\therefore h(s') \int_{s'-2}^{1} \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} [1 - (s' - 2)]$$
$$= \frac{1}{2}(3 - s')$$

故 $h(s')$
$$= \frac{1}{2} s \qquad 0 < s' < 1$$
$$= \frac{1}{2} \qquad 1 < s' < 2$$
$$= \frac{1}{2}(3 - s') \qquad 2 < s' < 3$$
$$= 0 \qquad else\ where$$

$$M'_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts} h(s')\, ds'$$
$$= \int_0^1 e^{ts'} \frac{1}{2} s' ds' + \int_1^2 \frac{1}{2} e^{ts'} ds' + \int_2^3 \frac{1}{2}(3 - s') e^{ts'} ds'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s'}{t}e^{ts'}-\frac{1}{t^2}e^{ts'}\right]+\frac{1}{2t}e^{ts'}\Big|_1^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{e^{ts'}}{t}\Big|_2^3$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{s'}{t}e^{ts'}-\frac{e^{ts'}}{t^2}\right|_2^3$$

$$\therefore M_{s''}(t)=\frac{e^{3t}}{2t^2}-\frac{e^{2t}}{2t^2}-\frac{e^{t}}{2t^2}+\frac{1}{2t^2}$$

$$=\frac{1}{2t^2}\left[e^{3t}-e^{2t}-e^{t}+1\right]$$

$$M'_{s'}(t)=\frac{3te^{3t}-2te^{2t}-te^{t}-2e^{3t}+2e^{2t}+2e^{t}-2}{2t^2}$$

$$E(X)=M_s(0)=\lim_{t\to 0}M_s(t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3te^{3t}-2te^{2t}-te^{t}-2e^{3t}+2e^{2t}+2e^{t}-2}{2t^3}$$

由 *L. Hospital's rule*

$$=\lim_{t\to 0}\frac{9te^{3t}-4te^{2t}-te^{t}-3e^{3t}+2e^{2t}+e^{t}}{6t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{27e^{3t}-8te^{2t}-te^{t}}{12t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{81te^{3t}+27e^{3t}-16te^{2t}-8e^{2t}-te^{t}-e^{t}}{12}$$

$$=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

10－3

解： $f(x)=\lambda e^{-\lambda(x-a)}$　　　　$x\geq a$

(a) $M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)\,dx$

$$=\int_a^{\infty}e^{tx}\lambda e^{-\lambda(x-a)}\,dx$$

$$=\lambda\cdot e^{\lambda a}\int_a^{\infty}e^{x(t-\lambda)}\,dx$$

$$=\lambda\cdot e^{\lambda a}\frac{1}{t-\lambda}\cdot e^{x(t-\lambda)}\Big|_a^{\infty}$$

$$=\lambda e^{\lambda a}\frac{e^{-a(\lambda-t)}}{\lambda-t}$$

(b)$M_x(t)=\lambda e^{\lambda a}\dfrac{(\lambda-t)ae^{-a(\lambda-t)}+e^{-a(\lambda-t)}}{(\lambda-t)^2}$

$=\lambda e^{\lambda a}\dfrac{e^{-a(\lambda-t)}(a\lambda-at+1)}{(\lambda-t)^2}$

$E(X)=M_x(0)=\lambda e^{\lambda a}\dfrac{e^{-a\lambda}(a\lambda+1)}{\lambda^2}$

$=\dfrac{a\lambda+1}{\lambda}=a+\dfrac{1}{\lambda}$

同理$E(X^2)=M_x(0)=\dfrac{a^2\lambda^2+2a\lambda+2}{\lambda^2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$=\dfrac{a^2\lambda^2+2a\lambda+2}{\lambda^2}-\dfrac{a^2\lambda^2+2a\lambda+1}{\lambda^2}$

$=\dfrac{1}{\lambda^2}$

10－4

解：　(a) *let*　$P(X_i)$ 爲機率分配

$P(1)=P(X=1)=\dfrac{1}{6}$

$P(2)=P(X=2)=\dfrac{1}{6}$

$P(6)=P(X=6)=\dfrac{1}{6}$

$M_x(t)=\sum_{i=1}^{6}e^{tx_i}p(x_i)=\dfrac{1}{6}[e^t+e^{2t}+e^{3t}+e^{4t}+e^{5t}+e^{6t}]$

(b)$M_x(t)=\dfrac{1}{6}[e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+4e^{4t}+5e^{5t}+6e^{6t}]$

$\therefore E(X)=M_x(0)=\dfrac{1}{6}[1+2+3+4+5+6]$

$=\dfrac{21}{6}=3.5$

$M_x(t)=\dfrac{1}{6}[e^t+4e^{2t}+9e^{3t}+16e^{4t}+25e^{5t}+36e^{6t}]$

$\therefore E(X^2)=M_x(0)=\dfrac{1}{6}[1+4+9+16+25+36]$

$=\dfrac{91}{6}$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$$

10－5

解： 請參考習題6–7，由其解再代入mgf之公式中

$E(X)=M\quad x(0)$

$V(X)=M_x(0)=[M_x(0)]^2$

因數字甚繁，且無意義，故不再將算式列入。

10－6

解： $f(x)=\frac{1}{2}e^{-\quad x}\qquad -\infty<x<\infty$

(a)$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{tx}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{2}e^{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x(t+1)}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-x(1-t)}dx$$

第一個積分式只收斂於當 $t>-1$

第二個積分式只收斂於當 $t<1$

$\therefore M_x(t)$存在於 $-1<t<1$

$$M_x(t)=\frac{1}{2(t+1)}e^{x(t+1)}\Big|_{\infty}^{0}-\frac{1}{2(1-t)}e^{-x(1-t)}\Big|_{0}^{\infty}$$
$$=\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{2(1-t)}$$
$$=\frac{1}{1-t^2}$$

(b)$$M_x(t)=-(1-t^2)^{-2}(-2t)$$
$$=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$\therefore E(X)=M_x(0)=0$

$$M_x(t)=\frac{(1+t^2)^2\,2-2t\cdot 2(1+t^2)2t}{(1+t^2)^4}$$
$$=\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}$$

$\because E(X^2)=M_x(0)=2$

$\therefore V(X)=2$

10－7

解：　若分配爲$N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 其$M_x(t) = e^{t\mu x + \frac{\sigma x^2 t^2}{2}}$

$N(\mu_y, \sigma_y^2)$ 其$M_y(t) = e^{t\mu y + \frac{\sigma y^2 t^2}{2}}$

$Z = ax + by$

$\therefore M_z(t) = E(e^{tz}) = E(e^{(ax+ay)t})$

$E\,E(e^{axt} \cdot e^{byt})$

$= E(e^{axt}) \cdot E(e^{byt})$

$= E(e^{(at)x}) \cdot E(e^{(bt)y})$

$= M_x(at) M_y(bt)$

$= e^{at\mu x + \frac{\sigma x^2 a^2 t^2}{2}} \cdot e^{bt\mu y + \frac{\sigma y^2 b^2 t^2}{2}}$

$= e^{(a\mu x + b\mu y)t + \frac{t^2(a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)}{2}}$

此爲一以$a\mu_x + b\mu_y$爲期望値以$a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$爲變異數之常態分配。

故$Z = ax + by$爲一常態分配。

10－8

解：　(a)$M_x(t) = (0.4e^t + 0.6)^8$

$Y = 3x + 2$

$\therefore M_y(t) = e^{2t} M_x(3t) = e^{2t}(0.4e^{3t} + 0.6)^8$

(b)$M_x'(t) = 8(0.4e^t + 0.6)^7 \cdot 0.4e^t$

$\therefore E(X) = M_x'(0) = 8 \times 0.4 = 3.2$

(c)$M_x(t) = (0.4e^t + 0.6)^8$

$= (0.4e^t + (1 - 0.4)^8)$

令　$p = 0.4$　　$n = 8$

$M_x(t) = [pe^t + (1-p)]^n$

此爲二項分配（其參數p．n）之mgf

故X爲二項分配。

$\therefore E(X) = np = 8 \times 0.4 = 3.2$

10－9

解：　(a)$R = \sum_{i=1}^{5} R_i$

因每一R_i均爲常態分配，且$E(R_i) = 10$

$V(R_i) = 0.16$，則R亦爲常態分配且

$E(R) = 50$

$V(R) = 0.8$　　　　$\sigma(R) = \sqrt{0.8} = 0.895$

令 $R_s = \dfrac{X-50}{0.895}$ 則 R_s 具分配 $N(0,1)$

$$\therefore P(R>49) = 1 - p\left(\frac{R-50}{0.895} < \frac{49-50}{0.895}\right)$$
$$= 1 - p(R_s < -1.117)$$
$$= 1 - \Phi(-1.117)$$
$$= 1 - 0.1314$$
$$= 0.8686$$

(b) $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$

$$E(R) = nE(R_i) = 10n$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^{n} V(R_i) = 0.16n$$

令 $R_s = \dfrac{R-10n}{\sqrt{0.16n}}$ 則 R_s 有 $N(0,1)$ 的分配

$$\therefore P(R>100) = 0.05$$
$$P(R \leq 100) = 0.95$$

$$P\left[\frac{R-10n}{\sqrt{0.16n}} < \frac{100-10n}{\sqrt{0.16n}}\right] = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{100-10n}{\sqrt{0.16n}}\right) = 0.95$$

$$\frac{100-10n}{\sqrt{0.16n}} = 0.65$$

$$\frac{100-10n}{0.4\sqrt{n}} = 1.65$$

$$n + 0.066\sqrt{n} - 10 = 0$$

$$\therefore \sqrt{n} = \frac{-0.066 \pm \sqrt{(0.066)^2 + 40}}{2}$$

$$= \frac{-0.066 + 6.4}{2} \simeq 3$$

$$\therefore n = 9$$

故須串聯 9 個電阻。

10－10

解：(a) $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$，

每個電阻均勻分配於 $(0,1)$

$M_{R_i}(t)=\frac{1}{t}(e^t-1)$ (由 *example* 10－1)

$\therefore M_R(t)=\prod_{i=1}^{n} M_{R_i}(t)$

$=[\frac{1}{t}(e^t-1)]^n=\frac{1}{t^n}(e^t-1)^n$

(b) $E(R_i)=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$

$E(R)=\frac{n}{2}$

$V(R_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{12}$

$V(R)=\frac{n}{12}$

10 11

解： (a)因 X 爲 X_n^2 分配

$M_x(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$

$M_x'(t)=-\frac{n}{2}(1-2t)^{-\frac{n+2}{2}}\cdot(-2)$

$E(X)=M'(0)=n$

(b) $M_x''(t)=n(-\frac{n+2}{2})(1-2t)^{-\frac{n+4}{2}}(-2)$

$E(X^2)=M_x''(0)=n(n+2)$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$=n(n+2)-n^2$

$=2n$

10－12

解： (a) V 有 $N(0,4)$ 分配

$V'=\frac{V}{2}$ 有 $N(0,1)$ 分配

$(\frac{V}{2})^2$ 有 X_1^2 的分配

$K=\frac{mV^2}{2}=\frac{10}{2}V^2=20V'^2$

故 K 亦爲 X_1^2 分配

因 K 的 mgf 爲 $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

by Them 10.2

$M_{20x}(t) = M_x(20t)$

$\therefore M_k(t) = (1 - 2 \times 20t)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 40t)^{-\frac{1}{2}}$

(b) $P(K \leq 3) = P(5V^2 \leq 3)$

$= P(\frac{V^2}{4} \leq 0.15)$

$= P(-0.388 \leq \frac{V}{2} \leq 0.388)$

$= P(V \leq 0.388) - P(V \leq -0.388)$

$= \Phi(0.388) - \Phi(-0.388)$

$= 2\Phi(0.388) - 1$

$= 2 \times 0.6517 - 1$

$= 0.3034$

10 − 13

解： $S = T_1 + \cdots\cdots + T_{10}$

each T_i *has distribution of exponential with parameter* 0.5 *by Them* 10.9

S has gamma distribution "with are meter 0.5, 10 *by eq.* 9.17 *The cdf of gamma distribution can be expressed as*

$$F(X) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\alpha x}(\alpha x)^k}{k!}$$

故 *S has cdf*

$$F(S) = 1 - \sum_{k=0}^{a} \frac{e^{-0.5s}(0.5s)^k}{k!}$$

$$P(s \geq 15.5) = 1 - P(s < 15.5) = 1 - F(15.5)$$

$$= 1 - [1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-5.75}(5.75)^k}{k!}$$

$$= 0.9354$$

10 − 14

解： 因 $X_1 \cdots\cdots X_{80}$ *each has distribution* $N(0, 1)$

故 $X_1^2 \cdots\cdots X_{80}^2$ *each has distribution* X_1^2

因卡方分配具再生能力（*Reproductive property*）

若令 $Y = X_1^2 + \cdots\cdots + X_{80}^2$

則 Y 亦爲卡方分配，自由度 80

則由定理 9 − 2 知

$\sqrt{2}Y$ *has distribution* $N(\sqrt{159}, 1)$

故$P(X_1^2+\cdots\cdots+X_{80}^2>77)=P(Y>77)$

令$Y_1=\sqrt{2}Y-\sqrt{159}$則Y_1 has distribution $N(0,1)$

故$P(X_1^2+\cdots\cdots+X_{80}^2>77)$

$=1-p(Y<77)$

$=1-p(\sqrt{2}Y<\sqrt{154})$

$=1-p(\sqrt{2}Y-\sqrt{159}<\sqrt{154}-\sqrt{159})$

$=1-\Phi(12.4-12.6)$

$=1-0.4207$

$=0.5793$

10－15

解：　因X_i代表n_i次實驗中成功的次數

故X_i為二項分配

$$M_{x_i}(t)=\sum_{k=0}^{n_i}e^{tk}\binom{n_i}{k}p^k(1-p)^{n_i-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n_i}\binom{n_i}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n_i-k}$$

$$=[pe^t+(1-p)]^{n_i}$$

$\because X=X_1+\cdots\cdots+X_k$

因X_i間互為獨立

$$M_x(t)=M_{x_1}(t)\cdots\cdots\cdots M_{x_k}(t)$$

$$=[pe^t+(1-p)]^{n_1}\cdots\cdots\cdots[pe^t+(1-p)]^{n_k}$$

$$=[pe^t+(1-p)]^{n_1+\quad+n_k}$$

因此一二項分配的mgf

故X亦為一二項分配，參數P及$n_1+\cdots\cdots+n_k$

10－16

解：　因each X_i均為卜氏分配參數α_i，且因卜氏分配，具再生能力，效$X=\Sigma X_i$仍為一卜氏分配，且參數為

$\alpha=\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n$

$$\therefore P\left(X_1=\frac{x_1\cdots\cdots x_n=X_n}{X=x}\right)=\frac{p(X_1=x_1)\cdots\cdots p(X_n=x_n)}{p(X=x)}$$

$$=\frac{\dfrac{e^{-\alpha}\alpha_1^{x_n}}{x!}\cdots\cdots\cdots\dfrac{e^{-\alpha^n}(\alpha_n)^{x}_{n}}{x_n!}}{\dfrac{e^{-\alpha^i}(\Sigma\alpha_i)^x}{x!}}$$

$$=\frac{x!}{x_1!\cdots\cdots x_n!}\cdot\frac{e^{-\alpha_1}\cdots\cdots e^{-\alpha_n}}{e^{-\alpha_i}}\cdot\frac{\alpha_1^{x_1}\cdots\cdots\alpha_n^{x_n}}{(\Sigma\alpha_i)}$$

$$=\frac{x\,!}{x_1\,!\cdots\cdots x_n\,!}\cdot\frac{\alpha_1 x_1\cdots\cdots\alpha_n x_n}{(\Sigma\alpha_i)^{x_1+\quad+x_n}}$$

$$=\frac{x}{x_1\,!\cdots\cdots x_n\,!}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\Sigma\alpha_i}\right)^{x_1}\cdots\cdots\cdots\left(\frac{\alpha_n}{\Sigma\alpha_i}\right)^{x_n}\cdot$$

此卽爲一*multionrmial distribution*

10－17

解： (a)令X爲幾何函數分配

$$F(x=k)=q^{k-1}\cdot p$$

$$M_x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{tk}q^{k-1}p$$

$$=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}e^{tk}q^{k}$$

$$=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(e^{t}q)^{k}$$

$$=\frac{p}{q}\;\frac{e^{t}q}{1-e^{t}q}$$

$$=\frac{e^{t}q}{1-e^{t}q}$$

(b)若令$Z=x_1+x_2$

$$M_{x_1}(t)=\frac{e^{t}p_1}{1-e^{t}q_1}$$

$$M_{x_2}(t)=\frac{e^{t}p_2}{1-e^{t}q_2}$$

則因$M_z(t)=M_{x_1}(t)\cdot M_{x_2}(t)$

$$=\frac{e^{t}p_1}{1-e^{t}q_1}\cdot\frac{e^{t}p_2}{1-e^{t}q_2}$$

不能表爲$\dfrac{e^{t}p}{1-e^{t}q}$的形式

故不爲一幾何分配

所以幾何分配，不具再生能力。

10－18

解： $M_x(t)=\dfrac{3}{3-t}$

若Y爲一指數分配，則$M_y(t)=\dfrac{\alpha}{\alpha-t}$

故X爲一參數$\alpha=3$的指數分配

$V(X)=\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{9}$

∴標準差　$\sigma=\frac{1}{3}$

10－19

解：　X均勻分配於$(-1,2)$

$f(x)=\frac{1}{3}$　　　　　　$X\in(-1,2)$

$M_x(t)=\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}e^{tx}\,dx$

$=\frac{}{3t}e^{tx}\Big|_{-1}^{2}=\frac{e^{3t}-1}{3te^{t}}$

10－20

解：　令X_1，X_2為鐵柱的長度。

X_1，X_2 has distribution $N(3.25, 0.0025)$

$X=X_1+X_2$為合成的總長

因常態分配具再生能力

故X仍為一常態分配

且$E(X)=3.25\times2=6.5$

$V(X)=0.0025\times2=0.005$

即X has distribution $N(6.5, 0.005)$

令$X_1=\frac{X-6.5}{\sqrt{0.005}}=\frac{X-6.5}{0.07}$

則X_1為$N(0,1)$之分配

$\therefore P(X\leq6.6)=P\left(\frac{X-6.5}{0.07}\leq\frac{6.6-6.5}{0.07}\right)$

$=P(X_1\leq1.43)$

$=\Phi(1.43)=0.9236$

第十一章 可靠度理論的應用 (Applications to Reliability Theory)

§11—1 本章將要探討先前各章中一些重要概念的應用及其領域的擴展

假設吾人考慮有一個組件承受了某“應力”(stress)。這可能爲一鋼樑承受荷重，電路裝上保險絲，機翼受力的影響，或電器的使用。且假設對於一阻件的破壞(failure)吾人可以給予一界定， 如樑的龜裂，保險絲的斷掉，機翼的彎曲………等等。

若某一組件於 $t=0$ 時施以某一應力，直到其破壞發生，這壽命長 T，可以視爲 pdf f 的連續隨機變數。在一既定的模式中，由經驗上顯示，吾人無法預測 T 值。也就是說，對同一種組件，施以相同的應力，其破壞的時間並不同，因此將 T 視爲一隨機變數的機率模式(probabilistic model) 似乎是唯一較具實際感的方法。下面則來介紹這種重要概念。

【定義】 T 爲組件的壽命長，一組件在時間 t 的信賴度爲 $R(t)$，定義爲

$$R(t)=P(T>t)$$

R 稱爲信賴度函數。

【註】 此定義僅說明這組件的可靠度等於這組件在〔0，t〕時段內不發生損害的機率，例：$R(t_1)=0.90$，這表在某情況下當時間爲 t_1 時，仍有百分之九十在有效的作用者。

T 的 pdf 爲 f 則

$$R(t)=\int_t^{\infty} f(s)\,ds$$

T 的 cdf 爲 F，則

$$R(t)=1-p(T\leq t)=1-F(t)$$

【定義】 失效率(failure rate) Z (有時稱爲 *hazard* 函數) 與隨機變數 T 的關係爲

$$Z(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{R(t)} \qquad \text{其中} F(t)<1 \qquad (11-1)$$

【註】 爲了說明 $Z(t)$，考慮其條件機率

$$P(t\leq T\leq t+\triangle t \mid T>t)$$

亦卽表這 $\triangle t$ 時間內，發生失效的機率，應用條件機率的定義知

$$p(t\leq T\leq t+\triangle t \mid T>t)=\frac{p(t\leq T\leq t+\triangle t)}{p(T>t)}$$

$$=\int_t^{t+\triangle t}\frac{f(x)\,dx}{p(T>t)}$$

$$=\frac{\triangle t f(\xi)}{R(t)}$$

其中 $t \leq \xi \leq t+\triangle t$

末式約等於 $\triangle t\ Z(t)$，而 $\triangle t\ Z(t)$ 即表當 t 的期候仍然在作用而在 t 與 $t+\triangle t$ 時間內失效的比率。

由上面可知 T 的機率密度函數 f 具有決定失效率 Z 的唯一性，反之亦成立。

【定理 **11－1**】　若失效的時間 T 為一連續性隨機變數，其 pdf 為 f，且 cdf 為 F，若 $F(0)=0$，則 f 可以 Z 表為

$$f(t)=Z(t)\,e^{-\int_0^t Z(s)ds} \qquad (11-2)$$

【證】　因 $R(t)=1-F(t)$，所以 $R'(t)=-F'(t)=-f(t)$

得 $Z(t)=\dfrac{f(t)}{R(t)}=\dfrac{-R'(t)}{R(t)}$

兩邊由 0 積分到 t

$$\int_0^t Z(s)\,ds=-\int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)}ds=-\ln R(s)\Big|_0^t$$

$$=-\ln R(t)+\ln R(0)=-\ln R(t)$$

若且唯若 $R(0)=1$，亦即假設 $\ln(0)=0$

則 $R(t)=e^{-\int_0^t Z(s)ds}$

所以 $f(t)=F'(t)=\dfrac{d}{dt}[1-R(t)]=Z(t)\,e^{-\int_0^t Z(s)ds}$

由此機率密度函數 f 唯一決定於毀滅率 Z，可得到證明。

【定理 **11－2**】　討論平均失效時間 $E(t)$ 與可靠函數 R 的關係。若 $E(t)$ 為有限值，則

$$E(t)=\int_0^\infty R(t)\,dt \qquad (11-3)$$

【證】　因

$$\int_0^\infty R(t)\,dt=\int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(s)\,ds\right]dt$$

以分部積分法，令 $\int_t^\infty f(s)\,ds=\mu$，且 $dt=dv$，即 $v=t$，且 $du=-f(t)\,dt$，則

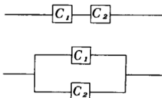
$$\int_0^\infty R(t)\,dt=t\int_t^\infty f(s)\,ds\ \Big|_0^\infty+\int_0^\infty tf(t)\,dt$$

右邊的第二積分式表$E(T)$，所以若能證明當$t=0$與當$t\to\infty$時，$t\int_t^{\infty} f(s)\,ds$ 可以消去，則本定理即可得到完整證明。而在$t=0$，這項消去是很顯然的，使用$E(T)$的有限性，讀者可自證明之。

探討可靠度與失效率的觀念，須要徹底研究這失效模式（*failure models*），首先來看下述幾個問題：

(a)對基本的失效律（failure laws）而言，什麼是合理的假設。

(b)已知失效律，若C_1與C_2為兩個組件，今將其組合而成串聯（in series）或並聯（in parallel）而為一系統，則這系統的毀滅律（或信賴度）為何？



§11—2　常態失效率

許多型式的組件，它們的失效行為可以常態分配來表之，即若T為某一項的壽命長，則其 pdf 為

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

毀滅時間T因其必大於零，所以$P(T<0)$必為零才能使上面的模式為適合的。而常態pdf的型式（如圖11－1）指出，一常態失效律意指大部份的失效皆分佈在平均失效時間$E(T)=\mu$附近，當$|T-\mu|$增加，則失效數則減少。且當$\{t \mid |t-\mu|<2\sigma\}$則其發生失效的機率為百分之95.72。

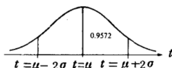


圖11－1

常態失效律的可靠的函數可以常態累積分配表Φ來表示，即

$$\begin{aligned}R(t)&=P(T>t)=1-P(T\le t)\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)dx\\&=1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

圖11－2為一常態毀滅律的一般可靠度曲線。注意若要獲一較高的可靠度（如0.90或較大），則其操作時間勿必少於μ，（μ為壽命長的期望值）。

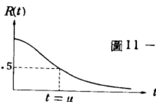


圖11－2

【例題11－1】假設一組件的壽命長爲常態分配，其標準差爲10（小時） 若這組件在100小時的操作期間，有0.99的可靠度，試問其壽命長的期望值？

$$0.99 = 1 - \Phi\left(\frac{100-\mu}{10}\right)$$

由常態分配表查知$\frac{100-\mu}{10} = -2.33$，所以$\mu = 123.3$小時

§11—3　指數失效率　(The Exponential Failure Law)

指數分配的失效時間爲重要失效律裡的一種，吾人有許多的方法來描述它，但最簡單的一方法是設失效率爲常數卽$Z(t)=\alpha$，則其結果由式（11－2）知pdf與失效時間T的關係，爲

$$f(t)=\alpha e^{-\alpha t} \qquad t>0$$

其逆敍述亦成立。卽，若f如上式，因$R(t)=1-F(t)=e^{-\alpha t}$得$Z(t)=f(t)/R(t)=\alpha$，所以有如下重要的結果。

【定理11－3】設失效時間T爲一連續性隨機變數，其值爲非負數，若且唯若其失效率爲定值，則T爲一指數分配。

【註】失效率爲常數的意義可解說爲在開始使用後，它失效的機率並未改變當$\triangle t>0$，$P(t\le T\le t+\triangle t \mid T>t)$，卽表此項失效在$\triangle t$時間內的機率。已知在時間$t$時失效並不發生，所以應用條件機率的定義知

$$p(t\le T\le \triangle t \mid T>t)=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\alpha(t+\triangle t)}}{e^{-\alpha t}}=1-e^{-\alpha\triangle t}$$

由此知此條件機率和t間彼此獨立，只與$\triangle t$相依，也就是說指數失效律(exponential failure law)顯示出其失效的機率與過去的時間無關。

若將上式右邊部份展開爲麥克羅林級數(Maclaurin series)得

$$p(t\le T\le t+\triangle t \mid T>t)=1-\left[1-\alpha\triangle t+\frac{(\alpha\triangle t)^2}{2!}-\frac{(\alpha\triangle t)^3}{3!}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\alpha\triangle t+h(\triangle t)$$

其中當$\triangle t$很小時，則$h(\triangle t)$近似可以省略，所以在$\triangle t$很小時上述機率與$\triangle t$成正比。

然而，在失效方面研究，在許多狀況，並不能臆測其爲指數分配。例如，若一根鐵條承受一連續應力，可是應力會有些減弱，因此這一模式卽非指數形分配。

參圖11－3，若失效時間T爲參數α的指數分配。

則，

$$E(T)=\frac{1}{\alpha} \quad ; \quad V(T)=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$F(t)=p(T\leq t)=1-e^{-\alpha t} \quad ; \quad R(t)=e^{-\alpha t}$$

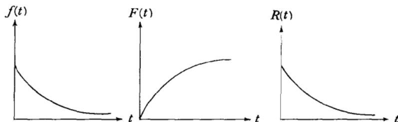


圖11－3

【例題11－2】若參數α為已知，且$R(t)$為特定，則吾人可求出其操作的時間t（小時）。例$\alpha=0.01$，$R(t)=0.90$，則

$$0.90=e^{-0.01t}$$

所以$t=-100\ ln(0.90)=10.54$小時

換句話說，若有100個這種組件操作達10.54小時後，將近有百分之90會失效。

【註】(a)在研究指數狀況時，吾人須辨別操作時間（operatring time）與操作年齡（opevatring age）的不同。

(b)操作時間為由任一固定時間開始算的時間段，因為指數情況只與此時間段有關而與過去的時間無關，然而，非指數的情形則受過去時間的影響，因此在指數情況T表操作時間，而非指數分配則T表其壽命長。

【例題11－3】雖然假設壽命長則其製造成本較大是不合理，但現在吾人設有一製造成本C為

$$C=3\mu^2$$

μ為失效的平均時間，且設D為使用這東西每小時的收益

則每件東西的收益為$P=DT-3\mu^2$

T為這件東西的有效作用時間，所以此收益的期望值為

$$E(p)=D\mu-3\mu^2$$

若欲求當μ為何值時能使$E(P)$為最大，只須令$\frac{dE(P)}{d\mu}$等於零，再解出μ即得，如本例$\mu=\frac{D}{6}$，

所以$E(P)_{max}=\frac{D^2}{12}$

【例題11－4】依例（11－3），假設失效時間T爲參數α的指數分配，失效時間的期望值爲$\mu=\frac{1}{\alpha}$，若再假設當這件東西做成後無法操作至少to小時以上，必須處罰$K(to-T)$元，其中$T(T<to)$爲毀壞發生的時間，因此每件的收益

$$P=DT-3\mu^2 \qquad 當T>to$$
$$D=DT-3\mu^2-K(to-T) \qquad 當T<to$$

其期望值爲

$$E(P)=D\int_{to}^{\infty}t\alpha e^{-\alpha t}dt-3\mu^2e^{-\alpha to}$$
$$+(D+K)\int_{o}^{to}t\alpha e^{-\alpha t}dt-(3\mu^2+Kto)(1-e^{-\alpha to})$$

直接積分後得　$E(P)=D\mu-3\mu^2+K[\mu-\mu e^{-\frac{to}{\mu}}-to]$

由此知若$K=0$，即得與例（11－3）之結果同。

§11－4　指數失效律與卜瓦松分配

(The Exponential Failure Law and The Poisson Distribution)

依上節所描述的指數失效定律與卜瓦松過程有相當密切的關係。假設失效的發生是由於某些"隨機"攪動的出現。而之所以有攪動乃由於外力的作用如電壓的升降……等。或內力的作用如化學分解……等。若假設X_t表在時間段t內發生的攪動（disturbances）數，$t\geq 0$，則構成一卜瓦松的處理過程（Poisson process）亦即，對一固定t，隨機變數X_t爲以αt爲參數的卜瓦松分配。若且唯若至少有一攪動發生，則失效在〔$0,t$〕內必將產生。若令T爲失效的時間，則吾人將假設這爲連續隨機變數。即

$$F(t)=P(T\leq t)=1-P(T>t)$$

在〔$0,t$〕內，若且唯若沒有攪動發生，此$T>t$。若且唯若$X_t=0$，這將發生，所以

$$F(t)=1-P(X_t=0)=1-e^{-\alpha t}$$

這爲指數失效律的cdf。

上述觀念的推廣有兩途徑。

(a)假設攪動是依據卜瓦松過程在出現，又假設不管這種攪動何時出現，仍有一定值的機率P將不產生失效，因此，若T爲失效時間，則如前所述。

$$F(t)=P(T\leq t)=1-P(T>t)$$

此$T>t$，若且唯若在〔$0,t$〕內沒有攪動發生，或有一攪動發生，但是沒有導致失效，或是有兩次攪動發生但仍沒有失效………因此

$$F(t)=1-\left[e^{-\alpha t}+(\alpha t)e^{-\alpha t}p+(\alpha t)^2\frac{e^{-\alpha t}}{2!}p^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=1-e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t p)^k}{k!}=1-e^{-\alpha t}e^{\alpha t p}$$

$$=1-e^{-\alpha(1-p)t}$$

所以T爲以$\alpha(1-P)$爲參數的一個指數失效律。

(b)假設攪動依照卜瓦松過程在出現。在一時間段t內，只要發生γ（$r\geq 1$）攪動，則在這時間吾人將假設其發生失效。若T爲失效時間，則如前

$$F(t)=1-p(T>t)$$

在此狀況，若且唯若（$\gamma-1$）或很少攪動發生，則$T>t$。所以

$$F(t)=1-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!}$$

由式（9－17）知上式等於$\int_0^t\left[\frac{\alpha}{(\gamma-1)!}\right](\alpha s)^{r-1}e^{-\alpha s}ds$此即表伽瑪分配的$cdf$。由此吾人可得一結論即。

失效時間遵從伽瑪失效律（Time to failuse follows a Gamma failuse law）（當然，若$\gamma=1$則變爲指數分配）。

§11－5 韋布失效定律 (The Weibull Failure Law)

在此讓我們來塑造將導致指數失效定律的定額失效率的觀念。

假設失效率Z與某項東西的壽命長T的關係爲

$$Z(t)=(\alpha\beta)t^{\beta-1} \qquad (11-4)$$

其中α，β皆爲正常數，由式（11－2）吾人得T的pdf如下

$$f(t)=(\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}\quad ,t>0,\alpha,\beta>0 \qquad (11-5)$$

符合式（11－5）的隨機變數則被稱爲有一韋布分配，圖（11－4）表$\alpha=1$，且$\beta=1$，2，3的pdf，可靠度函數R爲$R(t)=e^{-\alpha t^{\beta}}$，此爲$t$的減函數。

【註】 若令（11－4）式中$\beta=1$，則知指數分配爲韋布分配的一個特殊情況。若假設（11－4）式中之$Z(t)$並非一常數而與t的冪次成比率。例如，若$\beta=2$，則Z爲t的線性函數。若$\beta=3$，則Z爲t的二次函數；等，由此可知，依β值的改變，Z爲t的增減或定

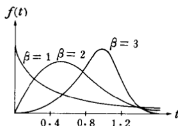


圖 11－4

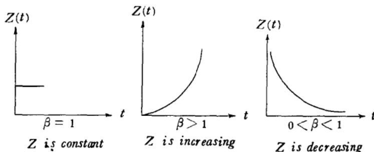


圖11－5

值函數。參考圖（11－5）

【定理**11－4**】若隨機變數爲一以式（11－5）爲pdf的韋布分配

則

$$E(T)=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

$$V(T)=\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right\}$$

【證明】　參問題11－8。

【註】　每當系統是由數個組件構成並且失效是由於在系統內許多破裂中最嚴重的破裂者所產生時，對失效定律而言，韋布分配代表一個很適切的模型。而且使用韋布分配，只要適當的選擇參數β即可獲得增加或減少的失效率。

§11－6　系統的可靠度　(Reliability of Systems)

在11－1節中的第二個問題曾經提過，若已知其組件的可靠度，問如何去評估整個系統的可靠度？這是一個相當困難的問題，因此我們只打算討論幾何普通的情況。假設兩組件掛成串聯。



這表示若要此系統去工作，則心須兩個組件皆成操作，若再假設這兩個組件互相獨立，則可得這系統的可靠度$R(t)$，以組件的可靠度$R_1(t)$，$R_2(t)$來表之。

$R(t)=P(T>t)$　（此T爲系統失效的時間）

$=P(T_1>t$ 且$T_2>t)$　（此T_1，T^2 分別代表組件C_1與C_2的失效時間）

$=P(T_1>t)P(T_2>t)=R_1(t)R_2(t)$

由此可知$R(t)\leq min[R_1(t), R_2(t)]$，亦即兩個組件串聯而成的系統，它的信賴度小於任一組件單獨的可靠度。將上述討論擴展到n個組件得下面定理

【定理**11－5**】若n個獨立性的組件串聯而成一系統，若這些組件的可靠度爲$R_i(t)$，則這系統的可靠度$R(t)$爲

$$R(t)=R_1(t)\cdot R_2(t)\cdots\cdots R_n(t) \qquad (11-8)$$

特殊情況：若T_1，T_2 爲參數α_1 與α_2 的指數失效定理，則式（11－8）變爲

$$R(t)=e^{-\alpha_1 t}e^{-\alpha_2 t}=e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

所以這系統的失效時間T的 pdf 爲

$$f(t)=-R'(t)=(\alpha_1+\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

由此可得如下定理。

【定理11－6】 若兩獨立的操作組件爲以參數α_1 與α_2 的指數失效定律今將其串聯起來，則此系統爲以$\alpha_1+\alpha_2$ 爲參數的指數失效定律。

（此定理亦可擴展到n個組件串聯）

【例題11－5】有一電路由4 個矽質眞空管，10 個矽質電晶體，20個組合的電阻器以及10 個陶製的電容器形成連續的一串，假設在某一應力情況下（亦即，規定的電壓，電流與溫度下>，這些組件有如下的常數失效率。

矽質眞空管	0.000002
矽質電晶體	0.00001
組合的電阻器	0.000001
陶製的電容器	0.000002

因爲失效率爲常數，所以指數分配代表上述各組件的失效定律。而且各組件串聯，所以整個電路的失效時間爲以參數爲

$$10(0.000002)+4(0.00001)+20(0.000001)+10(0.000002)=0.0001$$

的指數分配，所以這電路的可靠度爲

$$R(t)=e^{-0.0001t}$$

由此可知，若操作 10 個小時，這電路不發生失效的機率爲 $e^{-0.0001(10)}=0.999$，這電路失效時間的期望值爲 $\dfrac{1}{0.0001}=10,000$ 小時。

另一重要的系統是並聯（parallel）系統。其間組件的聯接方法爲除非所有組件的功能都失效整個系統才會失效。若只有兩組件，則如圖（11－6）。

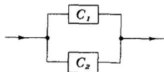


圖11－6

再假設這些組件的功能爲互相獨立，則這系統的可靠度$R(t)$可以組件的可靠度$R_1(t)$，與$R_2(t)$表如下

$$\begin{aligned}R(t)=P(T>t)&=1-P(T\le t)\\&=1-P[T_1\le t 且 T_2\le t]\\&=1-P(T_1\le t)P(T_2\le t)\\&=1-\{[1-P(T_1>t)][1-P(T_2>t)]\}\\&=1-[1-R_1(t)][1-R_2(t)]\\&=R_1(t)+R_2(t)-R_1(t)R_2(t)\end{aligned}$$

由最後一個式子可看出 $R(t) \geq Maximum[R_1(t), R_2(t)]$，亦即兩互相獨立組件組合而成的系統，它的信賴度 $R(t)$ 一定大於任一單獨的組件。

【定理 11－7】若 n 個功能獨立的組件被並聯的操作，且若第 i 個組件的信賴度為 $R_i(t)$ 則整個系統的可靠度 $R(t)$ 為

$$R(t) = 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \cdots\cdots [1 - R_n(t)] \quad (11-9)$$

若所有組件的可靠度均等，令 $R_i(t) = r(t)$，則上式變為

$$R(t) = 1 - [1 - \gamma(t)]^n$$

若考慮兩組件並聯時，因其失效時間為指數分配，即

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t)$$

$$= e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

所以並聯系統失效時間 T 的 pdf 為

$$f(t) = -R'(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - (\alpha_1 + \alpha_2) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

由此可知 T 並非指數分配，其期望值為

$$E(T) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

然而，一連串的操作常被視為必須的，所以吾人常用並聯操作以便增加這系統的可靠度。

【例題 11－6】假設有三個單位並聯被操作者，且每一個的失效率 α 均為 $\alpha = 0.01$（亦即每單位均為以 $\alpha = 0.01$ 的指數分配）所以每單位的可靠度為 $R(t) = e^{-0.01t}$，且操作 10 小時的可靠度等於 $e^{-0.1} = 0.905$ 近於百分之九十。若這三個單位並聯的操作者將可獲得多少的改進？

三單位並聯操作十小時，其可靠度為

$$R(10) = 1 - [1 - 0.905]^3 = 1 - 0.00086$$

$$= 0.99914 \qquad \text{約為百分之 } 99.9$$

由圖 11－7 可看出一個單位的信賴曲線與三單位並聯的可靠曲線間的區別。

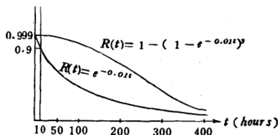


圖 11－7

到目前為止，吾人所討論均止於單獨串聯或並聯組合而成的最簡單的系統。其他還有許多的組合方法，在此僅敘述其中的幾種（參圖 11－8），而其中有關這些組合上的關係將會在本章後面的習題考慮。

(a) 串聯一並聯型（Series-parallel）。

(b) 並聯一串聯型（Parallel-series）。

(c) 備用系統，亦即有兩套組件，若且唯若第一套組件失去效用，則第二套即可取代第一套而使用。

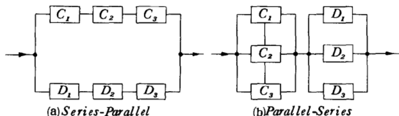


圖 11 － 8

在此我們簡略的來討論一下安全係數的觀念。假設施於結構物上的應力 S 被視為連續性隨機變數。而這結構物的抵抗力 R 亦被視為一連續性的隨機變數，則吾人定義這結構物的安全係數為

$$T=\frac{R}{S}$$

若 R 與 S 為彼此獨立的隨機變數，其 pdf 分別為 g 和 h，則 T 的 pdf 為

$$f(t)=\int_0^{\infty} g(ts)\,h(s)\,s\,ds$$

參定理（6 － 5），若 $S>R$ 亦即 $T<1$，則本結構將破壞，所以破壞的機率為

$$P_F=\int_0^1 f(t)\,dt$$



11 － 1 假設產品的壽命 T 是常態分配且 $E(T)=90$（小時）標準差＝5（小時），為了達到0.9，0.95，0 99 的可靠度，則分別需要使用多少小時？

11 － 2 假設電子裝置的壽命是指數分配，已知使用 100 小時的可靠度為0.90，則為達到 0.95 的可靠度要使用多少小時？

11 － 3 假設裝置的壽命當 $0<t<t_0$ 時有常數失效率 c_0，當 $t_1>t_0$ 則為 c_1，試求壽命 T 的 pdf 且劃其圖

11 － 4 假設破壞率 Z 是

$$Z(t)=0 \qquad 0<t<A$$
$$=c \qquad t\geq A$$

(a)試求壽命 T 的 pdf。 (b)計算 $E(T)$。

11 － 5 假設組件的失效法則是

$$f(t)=\frac{(r+1)A^{r+1}}{(A+t)^{r+2}}\quad,\ t>0$$

(a)問 $f(t)$ 是 pdf 時，A 和 r 何值？

(b)試求可靠函數（Reliability function）和hazard function的表示式

(c)證明hazard function是t的減函數

11－6　假設組件的失效率是k個指數失效法則的線性組合，亦即壽命T的pdf為

$$f(t)=\sum_{j=1}^{k} c_j \beta_j e^{-\beta_j t}\ ,\ t>0\ ,\ \beta_j>0$$

(a)若$f(t)$為pdf，則c_j何值？

(b)試求可靠函數與hazard函數的表示式

(c)試表示$E(T)$

(d)回答(b)和(c)，如果所有的$\beta_j=\beta$

11－7　收音機的六支電子管每支的壽命（年）均視為隨機變數，假設這些管子獨立操作，問在前兩個月不需更換管子的機率為何，如果

(a)壽命T的pdf為$f(t)=50\ te^{-25t^2}$，$t>0$

(b)壽命T的pdf為$f(t)=25\ te^{-25t}$，$t>0$

11－8　證明定理11－4

11－9　衛星的壽命是指數分配隨機變數，期望壽命等於1.5年，如果同時發射三枚這樣的衛星，問兩年後至少有三枚仍在軌道上運行的機率為何？

11－10　獨立操作的組件聯結如圖11－9所示，假設每一組件使用t小時的可靠性是

$$R(t)=e^{-0.03t}$$

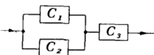


圖11－9

如果整個系統的壽命是T，則T的pdf為何？此系統的可靠度為何？與$e^{-0.03t}$比較怎麼樣？

11－11　假設n件零件串聯獨立操作，假定每件組件的壽命是常態分配，期望值50小時，標準差5小時。

(a)如果$n=4$，則52小時後系統仍可使用的機率為何？

(b)如果n件零件並聯，則n當何值才能使前55小時內系統失效的機率接近0.01？

11－12　在雷達裝置中的真空管的壽命L（月）發現是指數分配（參數$\beta=2$）。有一公司希望決定一支真空管被裝置後幾個月(m)應該被更換以降低每支管子的期望成本。每支管子的成本是C，裝置和更換之間最短是0.01（月），由於此種限制，則在下列各情況，m該為何值才能使期望成本$E(C)$最小，這兒C是L和m的函數

(a)$C(L, m)=3\,|L-m|$

(b)$C(L, M)=3$　　如果$L<m$

$= 5\ (\ L - m\ )$ 如果 $L \geq m$

(c) $C\ (\ L, m\ ) = 2$ 如果 $L < m$

$= 5\ (\ L - m\ )$ 如果 $L \geq m$

（本題取自Derman和Klein合著的Probability and Statistical Inference）

11－13 假設與產品之壽命 T 有關的失效率爲

$$Z(t) = C_0 \qquad 0 \leq t < t_0$$

$$= C_0 + C_1\ (\ t - t_0\ ) \qquad t \geq t_0$$

(a)試求 T 的 pdf

(b)試求 $R(t)$ 之表示式且劃其圖形

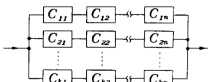
11－14 假設三件電子裝置每件的失效法則均是指數分配，但其參數分別是 β_1，β_2，β_3 又假設三件獨立操作且並聯成一系統

(a)求此系統的 $R(t)$

(b)求此系統壽命 T 的 pdf，且劃其圖

(c)求 $E\ (\ T\ )$

圖11－10



11－15 (a)一系統如圖11－10所示，且每件組件使用某時間的可靠度 R 均相同，試求系統使用相同時間的可靠度。

(b)如果每件組件遵守指數失效法則（失效率0.05）且若使用時間10小時且 $n = 5$ 試定 k 值使得系統的可靠度等於0.99。

11－16 本題的組件特性如（11－15），但其組合如圖11－11所示，試回答（11－15）中(a)(b)的問題。

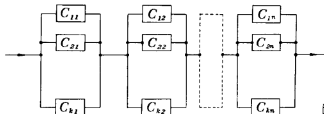


圖11－11

11－17 假設 n 件組件，每件有相同的常數失效率 λ 且這些組件並聯成一系統，試求此系統的期望壽命 $E(T)$？

11－18 (a)一飛機推進系統由五架引擎並聯組合，假設每架引擎的失效率均是 $\lambda = 0.0005$ 且引擎的失效互不影響，此系統至少要二架引擎沒有失效時才能使用，問此系統使用10小時的可靠度爲何？

(b)使用100小時和1000小時，可靠度分別爲何？

（此題讀者可查閱I．Bazovsky的Reliability Theory and

practice ）

11－19　考慮圖 11 － 12 中(a)，(b)的零件 A，A'，B，B' 和 C（C 可視爲"備用品"，A 和 B 均失效時才能使用），令 R_A，R_A'，R_B，R_B'，R_C，代表各個零件的可靠度（假定組件使用時互不影響），試求(a)，(b)兩系統的可靠度。

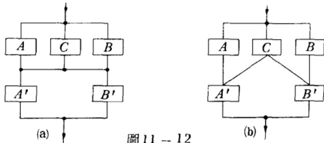


圖 11 － 12

11－20　如果習題 11 － 19 中的組件均有相同的常數失效率 λ，試求圖 11 － 12 (b)系統的可靠度 $R(t)$。

11－21　零件 A 當使用於特殊用途時的可靠度爲 0.9，組件 B 可用以取代 A，而有可靠度 0.75，問要幾個 B 並聯使用才能使可靠度爲 0.9？

11－22　兩組件獨立操作每件有相同的常數失效率且並聯成一系統，若 T 爲此系統的壽命，試求 T 的 mgf 並利用 mgf 決定 $E(T)$ 和 $V(T)$。

11－23　當我們考慮一個由幾件組件組成的系統時，我們永遠假設組件獨立操作，此假設已相當簡化我們的計算，然而，此種假定可能不合乎實際。有很多情形一件組件的行爲影響其他組件的行爲，通常是很棘手的問題，這裏我們僅考慮一個特殊情況。假設兩件組件 C_1，C_2 永遠同時失效，亦即 C_1 失效若且唯若 C_2 失效。證明在這種情況裏，C_1 和 C_2 均失效的機率＝C_1 失效的機率＝C_2 失效的機率。

11－24　4 件組件組合如圖 11 － 13 所示。假設除了 C_1 和 C_2 同時失效外，組件獨立操作。如果 T_i 表 C_i 的壽命且有指數分配（參數 β_i），試求此系統的可靠度 $R(t)$，同時求系統壽命 T 的 pdf。

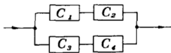


圖 11 － 13

11－25　如習題 11 － 24 但這次 C_1 和 C_3 同時失效，請回答習題 11 － 24 的問題。



11－1

【解】　$R(T)=P(t>T)=1-F(T)=1-\Phi\left(\frac{T-90}{5}\right)$

$R(T)=0.90$，$\dfrac{T-90}{5}=-1.28$ $\qquad T=83.55$

$R(T)=0.95$ $\qquad T=81.77$

$R(T)=0.99$ $\qquad T=78.35$

11－2

【解】 $1-F(100)=e^{-\alpha(100)}$

$0.90=e^{-100\alpha}$ ，$\alpha=0.00105$

$0.95=e^{-0.00105}$ $\qquad T=48.7$ 小時

11－3

【解】 $\dfrac{f_1}{1-F_1}=C_o$ $\qquad 0<t<t_o$

即 $\dfrac{1}{C_o}\dfrac{dF_1}{dt}+F_1=1\Rightarrow F_1=Ae^{-c_0t}+1$

$t=0 \qquad F_1=0 \qquad A=-1$

同法 $t\geq 0 \quad F_2=Be^{-c_1t}+1$

因 $F_1(t_o)=F_2(t_o)$

故 $B=-e^{-t_0(c_o-c_1)}$

$f=F'=C_oe^{-c_ot}$ $\qquad 0<t<t_o$

$=C_1e^{-[c_ot_o+c_1(t_o-t_1)]}$ $\qquad t\geq t_o$

11－4

【解】 $\dfrac{f}{1-F}=0$ $\qquad 0<t<A$ $\qquad$ 故 $f=0$

$\dfrac{f}{1-F}=C\Rightarrow F=Be^{-ct}+1$

$F(A)\Rightarrow B=-e^{AC}$

$f=F'=ce^{-c(t-A)}$ $\qquad t\geq A$

(b) $E(T)=\displaystyle\int_0^\infty tce^{-c(t-A)}\,dt=\frac{1}{c}e^{AC}$

11－5

【解】 $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt=1\Rightarrow\int_0^\infty f(t)\,dt$

$$=(r+1)A^{r+1}\int_0^\infty (A+t)^{-(t+2)}\,dt$$

$$=-A^{r+1}(A+t)^{-(r+1)}\Big|_0^\infty$$

$if\ r+1>0\ A\neq 0\Rightarrow\displaystyle\int^\infty f(t)\,di=1$

又 $f(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad A > 0$

$\therefore \quad A > 0 \qquad r > -1$

(b) $R = 1 - F$

$$= \left(\frac{A}{A+t}\right)^{r+1} , \quad H = \frac{f}{R} = \frac{r+1}{(A+t)}$$

(c) $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{-(r+1)}{(A+t)^2} < 0 \quad for \quad t > 0$

故H爲遞減

11－6

【解】 (a) $\int_0^\infty f(t)\,dt = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} C_j = 1$

(b) $$H(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\Sigma C_j B_j e^{-B_j t}}{1 - \Sigma C_j (1 - e^{-B_j t})} = \frac{\sum_{j=1} C_j B_j e^{-B_j t}}{\sum_{j=1}^{k} C_j e^{-B_j t}}$$

(c) $$E(T) = \int_0^\infty t\, f(t)\,dt$$

$$= t\,\Sigma(-C_j)\,e^{-B_j t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k} C_j e^{-B_j t}\,dt$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j}{B_j}$$

(d) $B_j = B \qquad H(t) = B \qquad E(T) = \dfrac{1}{B}$

11－7

【解】 (a) $F(t) = \int_0^t 50\,t e^{-25t^2} dt = -e^{-25t^2} \Big|_0^t = 1 - e^{-25t^2}$

$$P\left(all\ t > \frac{2}{12}\right) = \left[1 - F\left(\frac{1}{6}\right)\right]^6 =$$

$$= e^{-25\ 6(\frac{1}{6})^2} = 0.0156$$

(b) $$F(t) = \int_0^t 25\,t e^{-25t} dt$$

$$= t\,(-e^{-25t})\Big|_0^t + \int_0^t e^{-25t}\,dt$$

$$= \frac{1}{25} - \frac{1}{25} e^{-25t} - te^{-25t}$$

$$F\left(\frac{1}{6}\right)=0.038$$

$$P\left(all\ t>\frac{1}{6}\right)=(1-0.038)^{6}=0.792$$

11－8

【解】 $E(T)=\int_{0}^{\infty}\alpha\beta t\cdot t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}dt$

$$=-te^{-\alpha t^{\beta}}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t^{\beta}}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t^{\beta}}dt$$

令 $\mu=\alpha t^{\beta}$ $\qquad\qquad \frac{du}{dt}=\alpha\beta t^{\beta-1}$

$$E(T)=\int_{0}^{\infty}e^{-u}\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

$$=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\cdot\frac{1}{\beta}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{\frac{1}{\beta}-1}du$$

$$=\alpha^{\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

$$E(T^{2})=-t^{2}e^{-\alpha t^{\beta}}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}2te^{-\alpha t^{\beta}}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}2te^{-\alpha t^{\beta}}dt$$

$u=dt^{\beta}$ $\qquad\qquad \frac{du}{dt}=\alpha\beta t^{\beta-1}$

$$E(T^{2})=\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\cdot\frac{2}{\beta}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\frac{2}{\beta}-1}du=x^{-\frac{2}{\beta}}\frac{2}{\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)=\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$$

$$\therefore V(T)=E(T^{2})-E(T)^{2}$$

$$=\alpha^{\frac{2}{\beta}}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^{2}\right\}$$

11－9

【解】 $P=13p$（一好兩壞）$-p$（三壞）

$=p$（三好）$+3p$（兩好一壞）

$=(1-F)^{3}+3(1-F)^{2}F$

$$=e^{\frac{-6}{1.5}}+3e^{\frac{-4}{1.5}}\left(1-e^{\frac{-2}{1.5}}\right)=0.174$$

$$F=\int_0^2 \beta e^{-\beta t}\,dt = 1-e^{\frac{2}{1.5}}$$

$$\beta=\frac{1}{1.5}$$

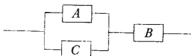
11－10

【解】 $R_T = 1 - p(B\text{壞}) - p(B\text{好}A.C\text{壞})$

$= 1-(1-R)-R(1-R)^2$

$= 2R^2 - R^3$

$= 2e^{-0.06t} - e^{-0.09t}$



$f = -R'$

$= -0.12e^{-0.06t} + 0.09e^{-0.09t}$

11－11

【解】 (a) $R(52) = [1-\Phi(\frac{52-50}{5})]^4$

$= [1-\Phi(0.4)]^4 = 0.014$

(b) $0.01 = [\Phi(\frac{55-50}{5})]^n$

$0.01 = (0.8413)^n$

$n = 42.2$　　　取　$n = 43$

11－12

【解】 (a) $E(C) = \int_0^\infty \beta \cdot 3\,|L-M|\,e^{-BL}\,dL$

$= \int_0^M 3(M-L)\beta e^{-\beta L}dL + \int_M^\infty 3(L-M)\beta e^{-\beta L}dL$

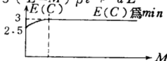
$= 3(M-\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\beta}e^{-BM})$

$\frac{dE(C)}{dM} = 3-6e^{-BM}=0$　　　$e^{-BM}=\frac{1}{2}$

$\beta = 2$　　　$M = ln\,2^{\frac{1}{\beta}} = ln\sqrt{2}$

(b) $E(C) = \int_0^M 3\beta e^{-\beta L}dL + \int_M^\infty 5(L-M)\beta e^{-\beta L}dL$

$= 3 + (\frac{5}{\beta}-3)e^{-\beta M}$



$\frac{dE(C)}{dM} = (3\beta-5)e^{-\beta M} > 0$ *for all* M, $E(C)$遞增故$M=0.01$

(c) $E(C)=\int_{0}^{M}2\beta e^{-\beta L}\,dL+\int_{M}^{\infty}5(L-M)\beta e^{-\beta L}\,dL$

$=\left(\frac{5}{\beta}-2\right)e^{-\beta M}+2$

$\frac{dE(C)}{dM}=(2\beta-5)e^{-\beta M}=e^{-\beta M}<0$

$\beta=2$ 　　故 $E(C)$ 遞減

$\therefore M=\infty$ 　　$E(C)$ 爲 min

$E(C)$ 2.5 2 M

11－13

【解】 $\frac{f_1}{1-F_1}=C_0\Rightarrow F_1=Ae^{-C_0t}+1$ 　　$0\le t<t_0$

$F_1(0)=0\Rightarrow A=-1$

$\therefore R_1(t)=1-F_1(t)=e^{-C_0t}$ 　　$f_1(t)=-R_1'(t)=C_0e^{-C_0t}$

當 $t\ge t_0$

$\frac{f_2}{1-F_2}=C_0+C_1(t-t_0)$

$F_2'+(C_0+C_1t-C_1t_0)F_2=C_0+C_1(t-t_0)$

$F_2=e^{-A(t)}\left[\int_{t_0}^{t}e^{A(t)}b(t)dt+C\right]$

$=e^{-\int(C_0+C_1t-C_1t_0)dt}\left[\int_{t_0}^{t}e^{\int(C_0+C_1t-C_1t_0)dt}(C_0+C_1(t-t_0))dt+C\right]$

$=e^{-C_0t-\frac{C_1}{2}t^2+C_1t_0t}\left[e^{C_0t+\frac{C_1}{2}t^2-C_1t_0t}\Big|_{t_0}^{t}+C\right]$

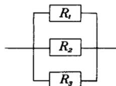
$F_2(t_0)=F_1(t_0)\Rightarrow C=e^{C_0t_0+\frac{C_1}{2}t_0^2}+e^{-\frac{C_1}{2}t_0^2}$

故 $F_2=1+e^{t(C_1t_0-C_0)-\frac{C_1}{2}(t^2+t_0^2)}$

$\therefore R_2=e^{t(C_1t_0-C_0)-\frac{C_1}{2}(t^2+t_0^2)}$

$f_2=-R_2'=C_1(t-t_0)e^{t(C_1t_0-C_0)-\frac{C_1}{2}(t^2+t_0^2)}$

11－14



【解】 (a) $R(t)=1-(1-R_1)(1-R_2)(1-R_3)$

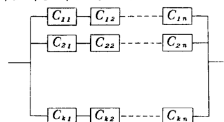
$=R_1+R_2+R_3-R_1R_2-R_2R_3-R_3R_1+R_1R_2R_3$

$R_1=e^{-\beta_1t}$ ， $R_2=e^{-\beta_2t}$ ， $R_3=e^{-\beta_3t}$

(b) $f=-R'=\beta_1 e^{-\beta_1 t}+\beta_2 e^{-\beta_2 t}+\beta_3 e^{-\beta_3 t}-(\beta_1+\beta_2)$
$e^{-(\beta_1+\beta_2)t}-(\beta_2+\beta_3)e^{-(\beta_2+\beta_3)t}$
$-(\beta_3+\beta_1)e^{-(\beta_3+\beta_1)t}+(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$
$e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)t}$

(c) $E(T)=\dfrac{1}{\beta_1}+\dfrac{1}{\beta_2}+\dfrac{1}{\beta_3}-\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}-\dfrac{1}{\beta_3+\beta_1}-\dfrac{1}{\beta_2+\beta_3}+\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$

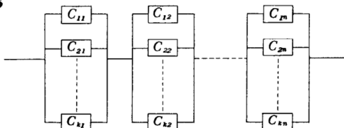
11－15



【解】 (a) $R_T(t)=1-p$（每列均損壞）
$=1〔p$（一列損壞）$〕^k$
$=1-(1-R^n)^k$

(b) $R=e^{-0.05(10)}=e^{-0.5}$
$0.99=1-(1-e^{-0.5n})^k$
$k=535$

11－16



【解】 (a) $R=〔1-(1-R)^k〕^n$
(b) $0.99=〔1-(1-e^{-0.5})^k〕^5$
$k=67$

11－17

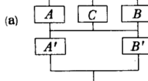
【解】 $R_1=R^n=e^{-n\lambda T}$
$\Rightarrow f=n\lambda e^{-n\lambda T} \quad \Rightarrow \quad E(T)=\dfrac{1}{n\lambda}$

11－18

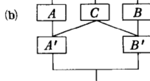
【解】 (a) $R_T=3R^2(1-R)+R^3$ $\qquad R=e^{-0.0005(10)}=0.994$
$\therefore R_T=0.99926$
(b) $R=e^{-0.05}=0.95$ $\qquad R_T=0.995$
$R=e^{-0.5}=0.606$ $\qquad R_T=0.581$

11－19

(a)



(b)



【解】 $R = p$（上半部完好）$\times p$（下半部完好）

$= [1-(1-R_A)(1-R_B)(1-R_C)] \times [1-(1-R_A')(1-R_B')]$

C 完好 $R = 1-(1-R_A')(1-R_B')$

C 壞 $R = 1-(1-R_A R_A')(1-R_B R_B')$

$\therefore R = R_C[1-(1-R'_A)(1-R_B')] + (1-R_C)[1-(1-R_A R_A')(1-R_B R_B')]$

$= 1 - R_C(1-R_A')(1-R_B') - (1-R_C')(1-R_A R_A')(1-R_B R_B')$

11－20

【解】 $R_T = R(2R-R^2) + (1-R)(2R^2-R^4)$

$= 4R^2 - 3R^3 - R^4 + R^5$

$= 4e^{-2\lambda t} - 3e^{-3\lambda t} - e^{-4\lambda t} + e^{-5\lambda t}$

$$E(T) = \frac{4}{2\lambda} - \frac{3}{3\lambda} - \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{5\lambda} = \frac{19}{20}\frac{1}{\lambda}$$

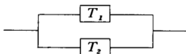
11－21

【解】 $1-(1-R_B)^k = R_A$ $1-(0.25)^k = 0.9$

$k = 1.65$ 取 $k = 2$

11－22

【解】 $T = max(T_1, T_2)$



$f(t_1) = \beta e^{-\beta t_1}$

$g(t_2) = \beta e^{-\beta t_2}$

$h(t) = 2[1-e^{-\beta t}]\beta e^{-\beta t}$

mgf $M_t(s) = \int_0^{\infty} e^{ts} h(t)\,dt$

$$= \int_0^{\infty} 2\beta e^{(s-\beta)t} - 2\beta e^{(s-2\beta)t}\,dt$$

$$= \frac{2\beta}{s-2\beta} - \frac{2\beta}{s-\beta}$$

$$E(t) = M'(0) = \frac{2}{\beta} - \frac{1}{2\beta} = \frac{3}{2\beta}$$

$V(t) = M''(0) - M'(0)^2$

$$= \left(-\frac{4}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2}\right) - \frac{9}{4}\frac{1}{\beta^2} = \frac{23}{4}\frac{1}{\beta^2}$$

11－23

【解】 因 C_1, C_2 必同時失效。故

$$P(C_1 \cdot C_2 \text{失效}/C_1\text{失效}) = 1 = \frac{p(C_1 \cdot C_2\text{失效})}{p(C_1\text{失效})}$$

$$P(C_1 \cdot C_2 \text{失效}/C_2\text{失效}) = 1 = \frac{p(C_1 \cdot C_2\text{失效})}{p(C_2\text{失效})}$$

$$\therefore P(C_1 \cdot C_2\text{失效}) = P(C_1\text{失效}) = P(C_2\text{失效})$$

11－24



【解】　由上題$P(C_1 \cdot C_2\text{損壞}) = P(C_1\text{損壞})$

$$\therefore R(t) = 1-(1-R_3R_4)(1-R_1)$$

$$= R_3R_4 + R_1 - R_1R_2F_4$$

$$= e^{-(\beta_3+\beta_4)t} + e^{-\beta_1 t} + e^{-(\beta_1+\beta_3+\beta_4)t}$$

$$h(t) = -R' = (\beta_3+\beta_4)e^{-(\beta_3+\beta_4)t} + \beta_1 e^{-\beta_1 t} - (\beta_1+\beta_3+\beta_4)e^{-(\beta_1+\beta_3+\beta_4)t}$$

11－25

【解】　$R(t) = p(C_1 \cdot C_3\text{皆完好且}C_2 \cdot C_4\text{至少有一完好})$

$$= R_1 \times [1-(1-R_2)(1-R_4)]$$

$$= R_1(R_2+R_4-R_2R_4)$$

$$= e^{-(\beta_1+\beta_2)t} + e^{-(\beta_1+\beta_4)t} - e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_4)t}$$

$$f = -R' = (\beta_1+\beta_2)e^{-(\beta_1+\beta_2)t} + (\beta_1+\beta_4)e^{-(\beta_1+\beta_4)t} + (\beta_1+\beta_2+\beta_4)e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_4)t}$$

第十二章 隨機變數的和 (Sums of Random Variables)

§12—1 導論

本章要來闡述一下本書一直在示意的一些觀念或理論。即一個試驗(experiment)的重複次數增加，則某一事件A出現的相對頻數f_A 將收斂於理論機率$P(A)$處：這也是爲什麼在很大重複次數試驗中，吾人可將事件出現的相對頻數視爲這事件出現的機率的由來。

例，假設有一新產品問世，但吾人事先根本不知道這些產品有多少是有毛病的。於是我們就先觀察許許多多數量的這種產品N，發現其中有n個有毛病，於是就使用$\frac{n}{N}$爲這產品有毛病的機率的近似值。

這$\frac{n}{N}$值爲一隨機變數，其值由兩件事情所決定。第一，$\frac{n}{N}$值定於這產品有毛病的基本的機率(但事先爲未知)；第二，決定於選擇這N個產品時的方法是否爲隨機，如果爲隨機，則$\frac{n}{N}$值將趨近於P。

§12—2 大數法則 (The Law of Large Numbers)

應用式(7－20)朱必雪夫不等式可得到這結果。首先舉一例，設有一導向飛彈，其能正常操作的機率爲0.95，假設我們試放N枚這種信賴度的飛彈，而若X表其中無法正常操作的飛彈數，則$E(X)=0.05N$，因爲吾人可假設X爲二項分配，亦即20枚有一枚失效，而當N的數目增加，則X以N的值將向0.05收斂這結果可由大數法則得到一更正確的說明。

大數法則(白諾里式)；令A爲試驗ε有關的一事件，今重複幾次的ε試驗，其中發生A事件有n_A次，且令$f_A=\frac{n_A}{n}$，$P(A)=p$對任一正數ϵ，

$$得P[\,|f_A-p|\geq\epsilon\,]\leq\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

$$即P[\,|f_A-p|<\epsilon\,]\geq 1-\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \qquad (12-1)$$

【證明】 令n_A爲事件A發生的次數，因此爲二項分配的隨機變數，則$E(n_A)=np$且$V(n_A)=np(1-p)$又$f_A=\frac{n_A}{n}$，所以$E(f_A)=p$，

且$V(f_A)=\dfrac{p(1-p)}{n}$，應用朱必雪夫不等式到隨機變數f_A上得

$$p\left[\,|f_A-p|<k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,\right]\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

令$\epsilon=k\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，則$k^2=\dfrac{(n\epsilon^2)}{[p(1-p)]}$，所以得

$$p\left[\,|f_A-p|<\epsilon\,\right]\geq 1-\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

【註】(a)上述結果可用許多不同方法作相同結果的解說，很明顯的上式即表為

$$\lim_{n\to\infty} p\left[\,|f_A-p|<\epsilon\,\right]=1 \qquad \text{對所有 } \epsilon>0$$

這也就是為什麼說相對頻數f_A收斂於$P(A)$。

(b)在微積分與機率上的所謂"收斂"（convergency）必須注意加以區別它們的不同，如吾人說當$n\to\infty$則2^{-n}收斂於零，它的意義為若n足夠大則2^{-n}將變成趨近於零。然而$f_A=n_A/n$收斂於$P(A)$其意義為這事件的機率

$$\left\{\,\left|\frac{n_A}{n}-P(A)\right|<\epsilon\,\right\}$$

若n相當大則其將非常的接近。

(c)由下述問題可獲得其他型式大數法則。

若要相對頻數與$P=P(A)$的差小於0.01的機率至少為0.95試問必須重複試驗ϵ多少次？

亦即對$\epsilon=0.01$，則取一n以便$\dfrac{1-p(1-p)}{[n(0.01)^2]}=0.95$，

解此n得$n=\dfrac{p(1-p)}{(0.01)^2(0.05)}$。

以δ與ϵ分別替代特定值0.05與0.01得

$$p\left[\,|f_A-p|<\epsilon\,\right]\geq 1-\delta \qquad \text{對任何 } n\geq\frac{p(1-p)}{\epsilon^2\delta}$$

再一次的強調，取$n\geq\dfrac{p(1-p)}{\epsilon^2\delta}$不保證有關$|f_A-p|$的任意事情，它只是使$|f_A-p|$值為很小變得可能。

【例題12－1】　擲一公正的骰子，若要保證六出現的相對頻數能在理論機率$\dfrac{1}{6}$的0.01內至少達百分之九十五以上，試問要擲多少次？

$$p=\frac{1}{6}\text{，}1-p=\frac{5}{6}\qquad \epsilon=0.01\text{ 且 }\delta=0.05$$

由上面關係式得 $n\geq\dfrac{(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}{(0.01)^2(0.05)}=27,778$ 。

【註】(a) f_A 是一個隨機變數而非是一個觀測值，若吾人實際的擲一骰子 27,778 次然後計算六出現的相對頻數，在與不在 $\frac{1}{6}$ 的 0.01 內都有可能。

上面例子指出，若在 100 個地方各擲 27,778 次骰子，則其中將有 95 個地方它觀測的相對頻數會在 $\frac{1}{6}$ 的 0.01 內。

(b)在許問題中，吾人根本不知 $P=P(A)$ 值，所以無法預知 n 的上限值，碰到這種情況 若假設 $p=\frac{1}{2}$ 則 $p(-p)=\frac{1}{4}$ 將爲這的最大值，也就是 $n\geq\dfrac{1}{4\epsilon^2\delta}$ 一定可得到一個較安全的次數。得，

$$p\{\,|f_A-p|<\epsilon\,\}\geq 1-\delta$$

【例題 12－2】 以一種方法製造某一產品，其爲不合格的機率 P（假設未知），若很大數目的 n 個產品被分類爲合格與不合格，試問 n 應多大才能有 99% 的把握，使不合格的相對頻數與 P 的差小於 0.05？

因 P 爲未知，所以由上例註(2)知。

$$\epsilon=0.05\qquad\qquad \delta=0.01$$

所以若 $n\geq\frac{1}{4}(0.05)^2(0.01)=10,000$ 則能滿足條件。

如同在Cheby shev 不等式的例子裡，我們發現如果對機率的分配有較多的認識，那將會在陳述上面有所改善（如，我們不須像以前一再重複的陳述，但仍可得到對於 f_A 趨近於 P 相同的陳述）。

【註】 如下我們可獲另一型式的大數法則，假設 $X_1\cdots\cdots X_n$ 爲彼此獨立且具有相同分配的隨機變數，它們的期望值與變異數都是有限值，若令 $E(X_i)=\mu$，$V(X_i)=\sigma^2$ 且定義 $\overline{X}=(1/n)(X_1+\cdots\cdots+X_n)$，則 $\overline{X}$ 是 X_1，$X_2\cdots\cdots X_n$ 的函數，稱爲 $X_1\cdots\cdots X_n$ 的算術平均數，因此仍是個隨機變數（第 13 章我們將徹底的來探討隨機變數，在此我們僅將 X_1，$\cdots\cdots X_n$ 視爲 X 的獨立測量值，而得到算術平數 $\overline{X}$），由期望值與變異數的性質知 $E(X)=\mu$，$V(X)=\frac{\sigma^2}{n}$

，我們將chebyshev不等式引用到隨機變數$\overline{X}$上

$$P[\,|\overline{X}-\mu|<\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\,]\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

令$\epsilon=\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$，則$k=\frac{\sqrt{n}\,\epsilon}{\sigma}$所以得

$$P[\,|\overline{X}-\mu|<\epsilon\,]\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \qquad (12-2)$$

當$n\to\infty$，則上面不等式的右邊將趨近於1，這也就是說，算術平均數"收斂"到$E(X)$。

【例題12－3】許多電子管接受試驗，令T_i表第i個電子管失效的時間。假設所有試管皆來自同一倉庫且均爲參數α的指數分配。

因此　　$E(T_i)=\alpha^{-1}$，令$\overline{T}=\frac{(T_1+\cdots\cdots+T_n)}{n}$

由上式（12－2）的大數法則可知，若n爲很大，那失效時間的算術平均的值趨近於α^{-1}是非常可能的。

§12－3　二項分配的常態近似估計 (Nomal Approximation to the Binomial Distribution)

上述的大法則實際上處理的是隨機變數X的二項分配，由於X的定義爲n個重複試驗的成功次數，而我們只要將二項分配的成功次數改換爲事件A的發生次數即可得這個關係式。於是上面的結果可概述爲，若重複次數增加，則成功的相對頻數$\frac{X}{n}$將收斂於成功的機率P。

然而，雖然知道當n很大時$\frac{X}{n}$將趨近於P，但並無法告訴我們接近的程度，爲了探討這個問題，我們必須研究當n很大時X的機率分配。

例如：假設某工廠製造的洗衣機約有5％爲不合格，如果檢驗100架，試問不合格少於4架的機率？

令X表不合格洗衣機數，由大數法則知$\frac{X}{100}$將趨近於0.05，然而並沒有告訴我們如何去求得這機率。這機率的正確值是由如下得

$$P(X<4)=\sum_{k=0}^{3}\binom{100}{k}(0.05)^k(0.95)^{100-k}$$

要直接計算這機率是相當的困難，我們已學習過一種二項分配的近似估計法，即卜瓦松近似法（the Poisson approximation）而在此，我們將考慮另外一種新的近似法，這種情況在當n足夠大時是很可用的。

考慮$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(1-p)^{n-k}$，此機率決定於$n$，由於過程

複雜，所以若 n 很大時，我們無法輕易看出其端倪。爲了探討這機率，我們需要運用到一相當着名的Stirling公式，這公式當 n 很大時

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\ e^{-n}n^{\frac{n+1}{2}} \qquad (12-3)$$

此式的意義爲 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{\frac{n+1}{2}}}=1$（大部份高等微積分都有此證明）表（12－1）給讀者對於此近似法一個較正確的概念（此表取自W. Feller, Probability theory and Its Application, John Wiley and Sons, Inc. 1st Edition, New York, 1950）

Table 12－1

n	$n!$	$\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+(\frac{1}{2})}$	$Difference$	$\dfrac{Difference}{n!}$
1	1	0.922	0.078	0.08
2	2	1.919	0.081	0.04
5	120	118.019	1.981	0.02
10	$(3.6288)10^6$	$(3.5986)10^6$	$(0.0302)10^6$	0.008
100	$(9.3326)10^{157}$	$(9.3249)10^{157}$	$(0.0077)10^{157}$	0.0008

當 n 很大時，在 $P(X=k)$ 中出現的各種階乘，使用Stirling公式，可以證得

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

$$\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]^2\right) \qquad (12-4)$$

當 n 很大時最後我們可證得

$$P(X\le k)=P\left[\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{k-np}{\sqrt{np(1-P)}}\right]$$

$$\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(k-np)/\sqrt{np(1-p)}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (12-5)$$

由此我們可得下述重要的結果（被稱爲二項分配的De Moivre-Laplnce的近似估計法）。

二項分配的常態近似法（Normal approximation to the binomial distribution），若 X 爲參數 n 與 p 的二項分配，且若

$$Y=\frac{X-np}{[np(1-p)]^{\frac{1}{2}}}$$

則對於 n 值很大時，Y 近似於一個 $N(0, 1)$ 的分配，其意義為 $\lim_{n\to\infty} P(Y \le y) = \Phi(y)$。如 P 接近 $\frac{1}{2}$，則對 $n > 10$ 者，這種近似值已相當的準確。如 P 接近於 0 或 1，n 則必須要相當大才能得到一較好的近似值。

【 註 】 (a)上述結果不僅很實用而且在理論亦相當有價值，它意味著我們可以利用已製成的常態分配表去計算二項分配的機率。

(b)表（12－2）顯示在各種 n，k 與 p 值下近似法（12－4）的準確性。

Table 12－2

k	$n=8$，$p=0.2$		$n=8$，$p=0.5$		$n=25$，$p=0.2$	
	Approximation	*Exact*	*Approximation*	*Exact*	*Approximation*	*Exact*
0	0.130	0.168	0.005	0.004	0.009	0.004
1	0.306	0.336	0.030	0.031	0.027	0.024
2	0.331	0.294	0.104	0.109	0.065	0.071
3	0.164	0.147	0.220	0.219	0.121	0.136
4	0.037	0.046	0.282	0.273	0.176	0.187
5	0.004	0.009	0.220	0.219	0.199	0.196
6	0＋	0.001	0.104	0.109	0.176	0.163
7	0＋	0＋	0.030	0.031	0.121	0.111
8	0＋	0＋	0.005	0.004	0.065	0.062
9	0＋	0＋	0＋	0＋	0.027	0.029
10	0＋	0＋	0＋	0＋	0.009	0.012
11	0＋	0＋	0＋	0＋	0.002	0.004

由上例，吾人可得

$$E(X) = np = 100(0.05) = 5$$

$$V(X) = np(1-p) = 4.75$$

所以

$$P(X \le 3) = p\left(\frac{0-5}{\sqrt{4.75}} \le \frac{X-5}{\sqrt{4.75}} \le \frac{3-5}{\sqrt{4.75}}\right)$$

$$= \Phi(-0.92) - \Phi(-2.3)$$

$$= 0.168$$

【 註 】 使用常態近似法去估計二項分配時，我們將離散型的隨機變數當作連續性隨機變數，所以在牽涉到區間的端點時，必須注意。例如對連續性的隨機變數而言 $P(X=3)=0$，可是在離散型隨機變數而言，其機率可能為正值。

爲改善上述近似值，將離散變數作如下的連續性修正。

(a) $P(X=k)\simeq P(k-\frac{1}{2}<X\leq k+\frac{1}{2})$

(b) $P(a\leq X\leq b)\simeq P(a-\frac{1}{2}\leq X\leq \frac{1}{2}+b)$

對上述估計 $P(X\leq 3)$ 時，利用第二種修正得

$$P(X\leq 3)=P(0\leq X\leq 3)=P(-\frac{1}{2}\leq X\leq 3\frac{1}{2})$$

$$\simeq\Phi(-0.69)-\Phi(-2.53)=0.239$$

【例12－4】假設100個組件裝配成一系統，每一組件的可靠度爲0.95（亦即組件在某特定時間內能正常操作的機率爲0.95）如果這些組件操作時爲彼此獨立而整個系統至少要有80個組件正常才能操作，試問這系統的可靠度爲多少？

令X表可操作的組件數，則必須計算

$P(80\leq X\leq 100)$

因 $E(X)=100(0.95)=95$

$V(X)=100(0.95)(0.05)=4.75$

所以 $P(80\leq X\leq 100)\simeq P(7.95\leq X\leq 100.5)$

$$=P(\frac{79.5-95}{2.18}\leq\frac{X-95}{2.18}\leq\frac{100.5-95}{2.18})$$

$$\simeq\Phi(2.52)-\Phi(-7.1)=0.994$$

§12－4 中央極限定理 (The Central Limit Theorem)

上述的近似法僅代表一般結果的一個特殊情況而已。爲了解一下這種函意，我們回憶一下，二項分配的隨機變數X可視爲下述獨立隨機變數的和。

$X_i=1$　　若第r次重複試驗爲成功

$=0$　　若第r次重複試驗爲失敗

因此$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$（見例7－14），對這隨機變數，我們已知$E(X)=np$，$V(X)=np(1-p)$，且當$n$很大時 $\frac{(X-np)}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似於$N(0,1)$分配。

如果任意n個獨立隨機變數的和可以一隨機變數X表之，如果n足夠大，則這個和將近似於常態分配，這結果稱爲中央極限定理。此定理的一種型態陳述於後。

中央極限定理：

令X_1，X_2……X_n……爲一序列的獨立隨機變數，其$E(X_i)=\mu_i$，$V(X_i)=\sigma_i^2$，$i=1$，2……令$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$，則在某些通常的條件下

（不在此詳細陳述），

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

有近似於$N(0,1)$的分配，亦即如G_n爲隨機變數Z_n的cdf，則有

$$\lim_{n \to \infty} G_n(Z) = \Phi(Z)$$

【註】(a)本定理顯然爲一De Moivre-Laplace近似法的推廣，因爲假設只有0和1的獨立隨機變數已被換爲任何種分配的隨機變數（只要期望值與變異數爲有限值）X_i 可以爲任意的分配而與和$X = X_1 + \cdots\cdots + X_n$ 可以常態分配加以近似的估計，這也是爲什麼常態分配在機率論那麼重要的理由。在很多問題顯示，我們所考慮的隨機變數可以n個獨立隨機變數和來表示，因此它的分配可以常態分配近似的加以估計。

譬如，對任一時刻某一城市的電量消耗等於許多個別消費者的總和。蓄水庫的水量可表爲許多個別水源的總和。物理實驗上測量的誤差爲許多無法察覺小誤差的累積………。

(b)在本定理的陳述中提及的通常條件可摘要爲：總和當中的單獨項對總和的差誤很微小，則可略而不計。任何單一項對總和有很大影響是不太可能的。

(c)由（定理10－5）知，任何有限個獨立常態分配的隨機變數的和，它的分配也是常態。但中央極限定理指出，要指其和近似於常態分配，其中的各項不必是常態分配。

(d)除非超出現有的水準，否則我們無法證明本定理，然而有個本定理的特殊情況，我們將加以陳述，至少它將對證明有點指示。

【定理12－1】　令$X_1 \cdots\cdots X_n$爲n個擁有相同分配的獨立隨機變數，且令$\mu = E(X_i)$，$\sigma^2 = V(X_i)$爲共同的期望值與變異數，若令$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$，　則$E(S) = n\mu$，$V(S) = n\sigma^2$，且對很大n而言，$T_n = \dfrac{(S - n\mu)}{\sqrt{n}\,\sigma}$ 有近似於$N(0,1)$分配，其意義爲 $\lim_{n \to \infty} P(T_n \le t) = \Phi(t)$。

【證明】（概述）：（讀者最好應複習第十章所討論的mgf基本概念），令M爲X_i共同的mgf。因爲X_i彼此獨立，所以S的mgf $M_s(t) = [M(t)]^n$ 且因T_n爲S的線性函數，所以由（定理10－2）得T_n的mgf爲

$$M_{T_n}(t)=e^{-\left(\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)t}\left[M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)\right]^n$$

即 $$\ln M_{T_n}(t)=\frac{-\sqrt{n}\,\mu}{\sigma}t+n\ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

（我們必須注意的要點是本題證明的觀念主要在於研究當 n 很大時 $M_{T_n}(t)$的性質）。

將$M(t)$展開爲Maclaurin 級數，

$$M(t)=1+M'(0)\,t+\frac{M''(0)\,t^2}{2}+R$$

R爲餘式（remainder term），又因$M'(0)=\mu$，$M''(0)=\mu^2+\sigma^2$

得 $$M(t)=1+\mu t+\frac{(\mu^2+\sigma^2)\,t^2}{2}+R$$

所以 $$\ln M_{T_n}(t)=-\frac{\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma}+n\ln\left[1+\frac{\mu t}{\sqrt{n}\,\sigma}+\frac{(\mu^2+\sigma^2)\,t^2}{2n\sigma^2}+R\right]$$

現在將使用 $\ln(1+x)$ 的Maclaurin 的展開式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

（以展開式在 $|x|<1$ 內爲有意義，在目前這情況

$$x=\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma}+\frac{(\mu^2+\sigma^2)\,t^2}{2n\sigma^2}+R$$

若 n 爲足夠大，則其絕對值將小於 1 ）。於是得

$$\ln M_{T_n}(t)=-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}+n\left[\left(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma}+(\mu^2+\sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2}+R\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma}+(\mu^2+\sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2}+R\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right]$$

因爲我們只是概述這證明的步驟而忽略了整個細節，以致某些代數演算均删略而僅敍述一下我們在做什麼。我們所要探討的是當 $n\to\infty$時的 $\ln M_{T_n}(t)$，任何項的分母均爲正冪次（例 $n^{-\frac{1}{2}}$）所以當 $n\to\infty$則將趨近於0，此亦顯示當 $n\to\infty$，則包括R的全部項數將趨近於0，經過R長的演算後得

$$\lim_{n\to\infty}\ln M_{T_n}(t)=\frac{t^2}{2}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}M_{T_n}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

$Y+Z$）／3 及其分配（見圖 12－3），隨機變數M與N的機率分配已顯示其"常態性"，亦即分佈曲線的鐘形外表開始明顯，剛開始X的分配不太對稱，但到隨機前數N時，常態性即顯明出來。

N	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$P(N=n)$	0.008	0.036	0.114	0.207	0.285	0.225	0.125

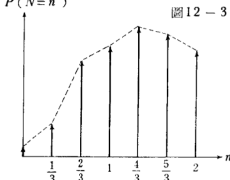


圖12 － 3

上述例子並沒有證明什麼，然而它以較具數理的方法將前述討論結果作一數值上的描述。讀者可繼續求 4 個變數平均數的機率分配（見習題12 － 10）。

【例題12－6】 假設我們有n個獨立的闖音電壓$V_1 \cdots\cdots V_n$，它們被接受到一"相加容器"內（見圖 12 － 4），令V表其所接受到電壓的總和，即$V=\sum_{i=1}^{n} V_i$

假設每一隨機變數V_i在區間〔0，10〕為均勻分配，因此$E(V_i)=5$（$Volts$）$Var(V_i)=\frac{100}{12}$，依據中央極限定理，若n有足夠大，則隨機變數$S=(V-5n)\sqrt{12}/10\sqrt{n}$為近似於$N(0,1)$的分配，因此，如果$n=20$，我們可計算進入的電壓超過 105 $Volts$ 的機率為。

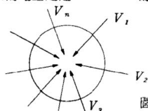


圖12 － 4

$$P(V>105)=P\left(\frac{V-100}{\left(\frac{10}{\sqrt{12}}\right)\sqrt{20}}>\frac{105-100}{\left(\frac{10}{\sqrt{12}}\right)\sqrt{20}}\right)$$
$$\simeq 1-\Phi(0.388)$$
$$=0.352$$

§12－5 其他可以常態分配來作近似估計的；卜瓦松 Poisson,Pascal 以及 Gamma

除了（12 － 3）節所述的二項分配外，有幾個重要的分配亦可用常態分配來近似的估計它們。而在須注意的，每一個我們要近似估計它的分配的隨機變數均可以一組獨立的隨機變數來表之，於是我們可利用 12 － 4 節的中央極限定理。

(a) 卜瓦松分配（The Poisson distribution）

如果在時間區間長度 t 內，某事件發生的密度是α（μ 單位時間發生的次數）而我們如果求此事件發生的總次數時，就產生了卜瓦松隨機變數（見 8 － 2 節），如同那節所述將總次數考慮成為一些較小而無重疊的區間內所發生次數的總和，於是我們可用上一節的結果。

【例題12－7】假設電話打進某一特定交換機的速率是每分鐘2通，試問15分鐘內打進22或少於22通的機率？

設X表接到電話數，則$E(X)=2(15)=30$。在計算$P(X\leq 22)$時先作連續性校正（見例12－4）。得$P(X\leq 22)\cong P\left(Y\leq \frac{22+\frac{1}{2}-30}{\sqrt{30}}\right)$

此Y爲$N(0,1)$的分配，因此上式爲$\Phi(-1.37)=0.0853$。

(b)巴斯卡分配（The Pascal distribution）

如Y等於要獲得r次成功所需作的白努力試行（Bernolli trials）次數，則Y有一巴斯分配且可表爲r個獨立的隨機變數和（見8－5節），因此若r足夠大，則前節的結論卽可應用。

【例題12－8】當P（成功）$=0.25$時，試問要獲得48次成功至多要試行150次的近似機率？

令X＝所需試行數，由式（8－8）知$E(X)=\frac{r}{P}=\frac{48}{0.25}=192$，且

$Var\ X=\frac{rq}{P^2}=\frac{(48)(0.75)}{(0.25)^2}=576$，所以

$$P(X\leq 150)\cong\Phi\left(\frac{150+\frac{1}{2}-192}{\sqrt{576}}\right)$$

$$\cong\Phi(-173)=0.0418$$

(c)伽瑪分配（The Gamma distribution）

如定理（10－9）所述，一個以α，γ爲參數的伽瑪分配的隨機變數可表爲r個獨立指數分配的隨機變數，因此若r足夠大，則可應用中央極限定理。

§12－6 有限個隨機變數和的分配 (The Distribution of the Sum of a Finite Number of Random Variables)

【例題12－6】可用以推動下面的討論，我們已知道任何有限個獨立常態隨機變數的和仍是常態分配，當n很大時，由中央極限定理可得結論說n個獨立常態隨機變數和近似於常態分配。下述問題猶待解決；假設考慮$x_1+\cdots\cdots x_n$，其中的X_i是獨立隨機變數（不一定是常態）且n並沒有大到合理的使用中央極限定理，則這個和的分配將爲何？譬如例12－6中，若$n=2$或$n=3$時，進入的電壓V將是什麼分配？

首先僅考慮兩個隨機變數和，則可建立下述的結果。

【定理12－2】假設X與Y爲獨立的連續性隨機變數，其pdf分別爲g與h，令$Z=X+Y$，其pdf爲S則

$$S(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\,h\,(\,z-w\,)\,dw$$

【證明】 因X與Y爲獨立，所以其聯合機率密度函數（ joint pdf ）f 可分解爲

$$f\,(\,x\,,\,y\,)=g(x)\,h(y)$$

考慮下述變換：

$$Z=x+y\,,\,w=x$$

因此$x=w$，$y=Z-w$，此變換的$Jocobian$爲

$$J=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$$

所以J的絕對值等於1，因此$Z=X+Y$與$W=X$的 $joiat\ \ pdf$ 爲
$k\,(\,z\,,\,w\,)=g(w)\,h\,(\,z-w\,)$。

所以 $$S(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\,h\,(\,z-w\,)\,dw$$

即得上述結果。

【 註 】 (a)上面牽涉到g與h函數的積分在許多數學書籍都可找到，通常稱爲g與h $Convolution\ \ integral$ ，有時被記爲g^*h。

(b)完成上述積分時必須相當小心，事實上，在計算乘積或商的pdf時亦有相同的困難，函數g和h僅在其引數內的某些值才不爲零，因此上面積分式的被積函數僅對那些使兩個被積函數的因數都不爲零的w值才不等於零。

(c)式（ 12 －6 ） 可被重複用以求得任意有限個獨立的連續性隨機變數和的pdf，如$S=X+Y+W$，我們可將此寫爲$S=Z+W$，其中$Z=X+Y$，我們可由上述方法求出Z的pdf，然後再由已知Z的pdf利用此法去求出S的pdf。

(d)我們不用$Jacobian$的觀念仍可由其他方法導出式（ 12 －6 ），令S表隨機變數$Z=X+Y$的cdf，則

$$\begin{aligned}S(z)&=P\,(\,Z\leq z\,)\\&=P\,(\,X+Y\leq z\,)\\&=\int_R\int g(x)h(y)dx\ dy\end{aligned}$$

此$R=\{(\,x\,,\,y\,)\mid x+x\leq z\}$

（見圖12 －5 ）

所以

$$S(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} g(x)h(x)dx\ \ dy$$

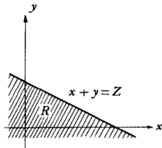


圖12 －5

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left[\int_{-\infty}^{z-x} h(y)\,dy \right] dx$$

將 $S(z)$ 對 z 微分得

$$s(z) = S'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(y-\alpha)\,dx$$

此與式（12－6）一致。

(e)因爲 $X+Y$ 的分配與 $Y+X$ 的分配應是一樣的，我們應能證

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) g(z-y)\,dy$。只要令第一式的 $z-x=y$，就得第二式。我們將此性質記爲 $g*h = h*g$。

【例題12－9】考慮兩種電子儀器 D_1 與 D_2，假設 D_1 的壽命長以下表之，且 T_1 爲參數 α_1 的指數分配，D_2 的壽命長以 T_2 表之且 T_2 爲參數 α_2 的指數分配，假設 D_1 與 D_2 被裝配成，若 D_2 開始操作則 D_1 就停此，$T = T_1 + T_2$ 代表這整個系統操作的全部時間，假設 T_1 與 T_2 爲獨立。沿用上述結果得

$$g(t_1) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_1}, \quad t_1 \geq 0$$

$$h(t_2) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t_2}, \quad t_2 \geq 0$$

（在 t_1 與 t_2 爲他值時，函數 g 與 h 均假設爲0）

0　1　t_1

圖12－6

因此由式（12－6）吾人得 $T_1 + T_2 = T$ 的 pdf 爲

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1) h(t-t_1)\,dt_1 \qquad t \geq 0$$

若且唯若 g 與 h 均爲正數，則此積分函數爲正，亦即，每當 $t_1 \geq 0$ 與 $t - t_1 \geq 0$，這即相等於 $0 \leq t_1 \leq t$（見圖12－6），則上積分式變爲

$$s(t) = \int_0^t \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_1} \alpha_2 e^{-\alpha_2 (t-t_1)}\,dt_1$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \int_0^t e^{-t_1(\alpha_1 - \alpha_2)}\,dt_1$$

$$= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(e^{-t\alpha_1} - e^{-t\alpha_2} \right), \quad 當\ t \geq 0$$

【註】(a)注意兩獨立指數分配的隨機變數和不再是指數分配。

(b)當 $\alpha_1 > \alpha_2$，T 的 pdf 圖形如（圖12－7）。

(c)上式對於 $\alpha_1 = \alpha_2$ 時沒有下定義，亦即在此情況 T_1 與 T_2 有相同的指數分配，爲了謹慎處理這特殊情況，考慮 $S(t)$ 的第一個積分式且令 $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ 得

$$S(t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha t_1} \alpha e^{-\alpha(t-t_1)}\,dt_1$$

$$= \alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t dt_1 = \alpha^2 t e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0$$

這表 *Gamma* 分配（見式9 − 16 ）此 *pdf* 的圖形示於圖 12 − 8，當 $t = \frac{1}{\alpha} = E(T_1) = E(T_2)$ 時有最大值。

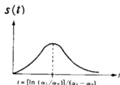


圖 12 − 7

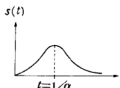


圖 12 − 8

【例題12−10】 讓我們重新考慮例 12 − 6，在處理兩個獨立隨機電壓 V_1 與 V_2 的相加，其中每一個〔0,10〕上都是均勻分配，所以

$$f(v_1) = \frac{1}{10} \quad , \quad 0 \le v_1 \le 10$$

$$g(v_2) = \frac{1}{10} \quad , \quad 0 \le v_2 \le 10$$

（在他處 f 與 g 皆為0 ），若 $V = V_1 + V_2$，則得

$$S(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_1)\, g(v - v_1)\, dv_1$$

如例 12 − 8 的推理上，被積分的函數，只對那些滿足 $0 \le v_1 \le 10$，$0 \le v - v_1 \le 10$ 的 v_1 才不等於0，這產生兩種情況，如圖 12 − 9 ）所示。



圖 12 − 9

(a) $v - 10 \le 10$ 且 $0 \le v \le 10$，兩者綜合得 $0 \le v \le 10$。

(b) $0 \le v - 10 \le 10$，且 $v \ge 10$，兩者綜合得 $10 \le v \le 20$。

在情況(a)可假設 v_1 的值在0 與 v 間，而情況(b)可假設 v_1 值在 $v - 10$ 與10間，所以我們得

$$\text{當 } 0 \le v \le 10 : \quad s(v) = \int_0^v \frac{1}{10}\frac{1}{10}\, dv_1 = \frac{v}{100}$$

$$\text{當 } 10 \le v \le 20 : \quad s(v) = \int_{v-10}^{10} \frac{1}{10}\frac{1}{10}\, dv_1 = \frac{20 - v}{100}$$

由此 V 之 *pdf* 的圖形如圖（ 12 − 10 ）所示。

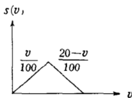


圖 12 − 10

【例題12－11】 讓我們再考慮一下這已經間接使用動差母函數證出的結果（見例10－11），做為隨機變數和的最後說明，即兩獨立的常態隨機變數和仍為常態分配，為了避免牽涉到某些代數運算，讓我們僅考慮一個特殊情況。

假設 $Z = X + Y$，其中 X 與 Y 均為 $N(0,1)$ 分配且彼此獨立的隨機變數，則

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \quad , -\infty < y < \infty$$

因此 Z 的 pdf 為

$$\begin{aligned} s(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(z-x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\ x^2+z^2-2zx+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2-zx)} dx \end{aligned}$$

完成被積分式指數的平方，得

$$(x^2 - zx) = \left[(x-\frac{z}{2})^2 - \frac{z^2}{4} \right]$$

因此

$$s(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2})\left[\sqrt{2}(\frac{x-z}{2})\right]^2} dx$$

令 $\sqrt{2}(x-\frac{z}{2}) = \mu$，則 $dx = \frac{d\mu}{\sqrt{2}}$，所以我們得

$$s(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu$$

上式包括 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 的積分結果等於1，所以

$$s(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-(\frac{1}{2})(\frac{z}{\sqrt{2}})^2}$$

但此代表一個分配為 $N(0,2)$ 的隨機變數的 pdf。

我們所討論的獨立隨機變數和的分配，僅限於連續性的隨機變數至至於離散型的情況刻稍微簡單，（至少在某些情況下）。如下述定理所示。

【定理12－3】假設X與Y爲獨立的隨機變數，其值均爲非負的整數。令$P(k) = P(X=k)$，$k=0.1，2$……且令$q(r)=P(Y=r)$，$r=0,1，2$…………令$Z=X+Y$，且$W(i)=P(Z=i)$，則

$$W(i)=\sum_{k=0}^{i} P(k)q(i-k) \qquad i=0,1，2\cdots\cdots$$

【證明】$W(i)=P(Z=i)$

$=P[X=0，Y=1，或X=1，Y=i-1，或\cdots\cdots X=i，Y=0]$

$$=\sum_{k=0}^{i} P[X=k，Y=i-k]=\sum_{k=0}^{i} P(k)q(i-k)$$

（因爲X與Y爲互相獨立的）

【例題12－12】令X與Y表在t時間內由兩不同放射性來源所放射的α粒子數，假設X與Y分別參數$\beta_1 t$與$\beta_2 t$的卜瓦松分配，令$Z=X+Y$表這兩來源所放射的總粒子數，應用定理12－3，我們得

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{k=0}^{i} P(k)q(i-k) \\ &= e^{-(\beta_1+\beta_2)t}\sum_{k=0}^{i}\frac{(\beta_1 t)^k(\beta_2 t)^{i-k}}{k!(i-k)!} \\ &= e^{-(\beta_1+\beta_2)t}\frac{(\beta_1 t+\beta_2 t)^i}{i!} \end{aligned}$$

（最後一個等式乃應用二項定理獲得）。

最後一式所代表的是參數爲$\beta_1 t+\beta_2 t$的卜瓦松隨機變數值爲i的機率。於此證實我們以前所知道的：兩獨立的卜瓦松隨機變數和有卜瓦松分配。



12－1　(a)製造產品時有2％是不良品，假設檢查n件產品，且記錄其不良品的相對頻數f_D，問n該多大才能使f_D與0.02相差少於0.05的機率至少爲0.98？

(b)回答(a)的問題，如果不良品的機率是p而非已知的0.02。

12－2　有一堆螺絲，其中3％是不良品。如果我們從中抽取n件，如果(a) $n=6$，(b) $n=60$，(c) $n=600$，則抽取的螺絲中至多有5％不良品的機率爲何？

12－3　(a)有一複雜系統是由100件獨立操作的組件所組成，任何組件在操作期間壞掉的機率均爲0.10，整個系統至少有85件零件沒有壞掉時

才能操作，問系統可操作的機率為何？

(b)假設上面的系統由 n 件組件組成，每件組件的可靠性為0.90 。至少80 %的零件沒有壞掉時系統才能操作，試決定 n 之值使得系統的的可靠性為0.95 。

12－4　假設30件電子裝置，D_1，D_2，……，D_{30}，使用的方式是：當D_1失效時D_2馬上可操作，當D_2失效時D_3可馬上操作，等等。假定D_i的壽命是個參數為$\beta=(0.1)^{-1}$小時的指數分配隨機變數，令T表30件裝置的總計操作時間，問T超過350小時的機率為何？

12－5　有一計算機在做實數加法運算時，將每個數化成最接近的整數再相加，，假設每次化成最接近整數時所引起的錯誤是互不影響且均勻分配在〔$-0.x$，0.5〕上

(a)如果有1500個數相加，問總錯誤超過15的機率為何？

(b)為了使總錯誤少於10的機率為0.90 ，可以有多少個數相加？

12－6　假設X_i，$i=1$，2，………，50，是50個獨立隨機變數每個均有參數是0.03的卜瓦松分配。

(a)利用中央極限定理，算$P(S\geq 3)$之值，這兒$S=X_1+\cdots\cdots\cdots+X_{50}$ 。

(b)以真實的機率與(a)的答案比較比較。

12－7　在一簡單電路裏，兩個電阻器R_1和R_2串聯起來，因此總電阻等於$R=R_1+R_2$。假設R_1和R_2是獨立隨機變數每個均有分配

$$f(r_i)=\frac{10-r_i}{50}\qquad 0<r_i<10,\ i=1,2$$

試求R的pdf，並劃其圖形。

12－8　假設（習題12－7）中的電阻器是並聯，試求R（總電阻）的pdf。（*hint*：R和R_1，R_2間的關係是$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$）。

12－9　測量產品的壽命T時，產生的錯誤可假定均分配在（-0.01，0.01）上，因此記載的時間（小時）可表為$T+X$，這兒T有參數是0.2的指數分配，而X則有上述的均勻分配，如果T和X是獨立的，試求$T+X$的pdf 。

12－10　假設X和Y是獨立且一致分配之隨機變數、且X的pdf是

$$f(x)=\frac{a}{x^2}\qquad x>a,\ a>0$$

$$=0\qquad elsewhere$$

試求$X+Y$的pdf

12－11　試進行例12－6後面提示的演算

12－12　(a)一架電子裝置的壽命T的分配是$N(100,4)$。假設在記錄T時，

產生一項錯誤，其大小可視爲隨機變數X，它均勻分配在（-1，1）上。如果X和T是獨立的，試以Φ表出$S=X+T$的pdf。

(b)計算$P(100\leq S\leq 101)$〔$hint$：利用$Simpson$法則估計積分值〕。

12－13 假設在某些壓力狀態下重複試驗一套新設備一直到它失效爲止。假設在任何一次試驗失效的機率是p_1，令X表獲得第一次失效所需要的試驗次數。第二套設備也被重複試驗直到失效爲止，而其失效的機率則爲p_2，令Y表獲得第一次失效所需的試驗次數。假設X和Y是獨立且令$Z=X+Y$，因此Z等於兩套設備均失效所需的試驗次數

(a)求Z的機率分配

(b)如果$p_1=0.1$，$p_2=0.2$求$p(Z=4)$

(c)如果$p_1=p_2$，討論(a)



12－1

【解】 (a) $p=0.02$　　　$\epsilon=0.05$

$$p[\,|f_D-p|\ \epsilon\,]\geq 1-\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}\ (fargeno\ law)$$

$$1-\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}=0.98\quad,\quad 1-\frac{0.02(0.98)}{n(0.05)^2}=0.98$$

$n=392$

(b) $$max\,[\,p(1-p)\,]=\frac{1}{4}\quad,\quad 1-\frac{\frac{1}{4}}{n(0.05)^2}=0.98$$

$n=5000$

12－2 ＝

【解】 (a) $n=6$　　　$6\times0.05=0.3$（卽沒有不良品）。

$\therefore p=(1-0.03)^6=0.83$

(b) $n=60$　　　$60\times0.05=3$

$$p=p(no\ defect)+p(1\ def)+p(2\ def)+p(3\ def)$$

$$=\sum_{k=0}^{3}\binom{60}{k}(0.03)^k(0.97)^{60-k}$$

$=0.65$　（由卜瓦松近似法求得）

(c) $n=600$

$$p=1-\frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}=1-\frac{0.03(0.97)}{600(0.02)^2}=0.8775$$

12－3

【解】 (a) $P_{fail} = 0.1$　　　$P_{work} = 1 - 0.1 = 0.9$

$$E(X) = nP_w = 90$$

$$V(X) = nP_w(1 - P_w) = 9$$

$$P(X \geq 85) = 1 - \Phi\left(\frac{85 - 90}{\sqrt{9}}\right) = -\phi(1.66)$$

$$= 0.95$$

(b) $P = 0.9$　　　E

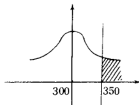
$$E(X) = 0.9n \qquad V(X) = (0.1)(0.9)n$$

$$0.95 = 1 - \Phi\left(\frac{0.8n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}} = -1.65$$

$$n = 24$$

12－4

【解】 $\beta = 0.1$　1／小時



$$E(X) = \frac{n}{\beta} = \frac{30}{0.1} = 300 \text{ 小時}$$

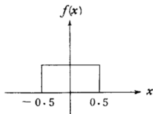
$$V(X) = \frac{n}{\beta^2} = 3000$$

$$\sqrt{V(X)} = 10\sqrt{30}$$

$$1 - \Phi\left(\frac{350 - 300}{}\right) = \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{30}}\right) = 0.184$$

12－5

【解】 (a) $E(X) = 0$



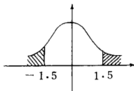
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= E(X^2)$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} x^2\,dx = 0.0823$$

$$E_n(X) = 0$$

$$V_n(X) = 1500 \times 0.0823$$



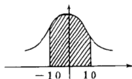
$$P = 2\Phi\left(\frac{-15 - 0}{\sqrt{15 \times 8.33}}\right)$$

$$= 2\Phi(-1.34) = 0.1802$$

(b)

$$0.9 = \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n \times 0.0833}}\right)$$

$$-\left[1 - \Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n \times 0.0833}}\right)\right]$$



$$\doteq 1-2\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n\times 0.0833}}\right) \Rightarrow \frac{-10}{\sqrt{n\times 0.0833}}$$

$$=-1.64$$

$$n=450$$

12－6

【解】 (a) $\lambda=0.03$ $\quad S=X_1+\cdots\cdots+X_{50}$

$$E(S)=nE(X)=50\times 0.03=15$$

$$V(S)=n\lambda=1.5$$

$$P(S\geq 3)=1-\Phi\left(\frac{3-1.5}{\sqrt{1.5}}\right)=1-\Phi(1.22($$

$$=0.1112$$

(b) $P(0)=e^{-0.03}$ $\quad P(1)=0.03\,e^{-0.03}$

$$P(2)=\frac{(0.03)^2}{2}e^{-0.03}$$

$$P=1-[p(s=0)+p(s=1)+p(s=2)]^2$$

$$=1-[(e^{-0.03})^{50}+\left(\frac{50}{1}\right)(0.03e^{-0.03})(e^{-0.03})^{49}$$

$$+\left(\frac{50}{2}\right)(0.03\,e^{-0.03})^2(e^{0.03})^{48}$$

$$+\left(\frac{50}{1}\right)\left(\frac{(0.03)^2}{2}e^{-0.03}\right)(e^{-0.03})^{49}]$$

$$=1-0.0885=0.1915$$

12－7

【解】 $R=R_1+R_2$ $\quad f(v_i)=\dfrac{10-r_i}{50}$ $\quad 0<r_i<10$

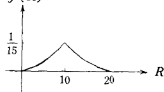
$r=1,2$

$$f(R)=\int_{-\infty}^{\infty}g(R_1)h(R-R_1)\,dR_1 \quad \begin{matrix} 0<R_1<10\cdots\cdots\text{①} \\ 0<R_1-R_1<10\cdots\text{②}\end{matrix}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^R\left(\frac{10-R_1}{50}\right)\left(\frac{10+R_1-R}{50}\right)dR_1 & 0\leq R<10 \ by\text{②} \\ \displaystyle\int_{R-10}^{10}\left(\frac{10-R_1}{50}\right)\left(\frac{10+R_1-R}{50}\right)dR_1 & 10<R<20\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2500}\left(100R_1-10RR_1+\dfrac{R_1^2}{2}R-\dfrac{R_1^3}{3}\right)\Big|_0^R & 0<R\leq 10 \\ \dfrac{1}{2500}\left(100R_1-10RR_1+\dfrac{R_1^2}{2}R-\dfrac{R_1^3}{3}\right)\Big|_{R-10}^{10} & 10<R<20\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{15000}(600R-60R^2+R^3) & 0<R\leq 10 \\ \dfrac{1}{15000}(8000-1200R+60R^2-R^3) & 10<R<20 \end{cases}$$



12－8

【解】 $\frac{1}{R}=\frac{\alpha}{R_1}+\frac{2}{R_2}$ 　　 $R=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$

選擇 　 $Z=R_1$

$\Rightarrow R_1=Z$ 　　 $R_2=\frac{R_1R}{R_1-R}$

$$\begin{vmatrix} \frac{2R_1}{2R} & \frac{2R_1}{2Z} \\ \frac{2R_2}{2R} & \frac{2R_2}{2Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{R_1R}{(R_1+R)^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{R_1R}{(R_1-R)^2}$$

$$\Rightarrow f(R)=\int_{-\infty}^{\infty} g(R_1)\,h\left(\frac{R_1R}{R_1-R}\right)\frac{RR_1}{(R_1-R)^2}\,dR_1$$

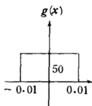
12－9

【解】 $f(t)=\alpha e^{-\alpha t}$ 　　 $t\geq 0$

$Z=T+X$ 　　 $|J|=1$

$$h(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(i)g(Z-t)\,dt \qquad t\geq 0 \cdots\cdots ①$$

$$-0.01\leq Z-t\leq 0.01 \cdots\cdots ②$$



$$= \begin{cases} \int_0^{z+0.01} \alpha e^{-\alpha t}(50)\,dt & -0.01\leq Z-0.01\leq 0 \\ \int_{z-0.01}^{z+0.01} \alpha e^{-\alpha t}(50)\,dt & 0\leq Z-0.01 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 50\,[\,1-e^{a(z+0.01)}\,] & -0.01\leq Z-0.01\leq 0 \\ 50\,[\,e^{-a(z-0.01)}-e^{-a(z+0.01)}\,] & 0\leq Z-0.01 \end{cases}$$

12－10

【解】 $g(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{x^2}\right)\left[\frac{a}{(Z-x)^2}\right]dx$ 　　 $x>a \cdots\cdots ①$

$z-x>a \cdots\cdots ②$

$$=\int_a^{z-a}\left(\frac{a}{x^2}\right)\left[\frac{a}{(z-x)^2}\right]dx \qquad \text{by ②} \quad x<z-a$$

$$= a^2 \int_a^{z-a} \left(\frac{\frac{2}{z^3}}{x} + \frac{\frac{1}{z^2}}{x^2} + \frac{-\frac{2}{z^3}}{z-x} + \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-x)^2} \right) dx$$

$$= a^2 \left[\frac{2}{z^3} \ln x - \frac{1}{z^2} \frac{1}{x} - \frac{2}{z^3} \ln(z-x) + \frac{1}{z^2} \frac{1}{z-x} \right] \Big|_a^{z-a}$$

$$= 2a^2 \left[\frac{2}{z^3} \ln \frac{z-a}{a} - \frac{1}{z^2(z-a)} + \frac{1}{z^2 a} \right] \quad z > 2a$$

12－11

【解】 $P(0) = (0.2)^3 = 0.08$

X	0	1	2
$P(X)$	0.2	0.3	0.5

$P(\frac{1}{3}) = 3(0.3)(0.2)^2 = 0.036$

$P(\frac{2}{3}) = 3(0.5)(0.2)^2 + 3(0.3)^2(0.2) = 0.114$

$P(1) = (0.3)^3 + 6(0.2)(0.3)(0.5) = 0.207$

$P(\frac{3}{4}) = 3(0.2)(0.5)^2 + 3(0.3)^2 0.5 = 0.285$

$P(\frac{5}{3}) = 3(0.3)(0.5)^2 = 0.225$

$P(2) = (0.5)^3 = 0.125$

12－12

【解】 (a) T 之 pdf 為 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-100)^2}{4}}$

X 之 $pdf \quad f(x) = \frac{1}{2}, \ -1 < x < 1$

$= 0 \qquad$ 其他

$$g(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-100)^2}{4}} \right] dt$$

$$= \int_{s-1}^{s+1} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-100)^2}{4}} \right] dt \qquad -1 \leq s - T \leq 1, \quad s-1\, T \leq s+1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{s-99}{2}\right) \Phi\left(\frac{s-101}{2}\right) \right]$$

(b) $P(100 \leq s \leq 101)$

$$= \int_{100}^{101} \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{s-99}{2}\right) - \Phi\left(\frac{s-101}{2}\right) \right] ds$$

$$= \frac{b-a}{3n} \left[g(s_0) + 4g(s_1) + 2g(s_2) + \cdots\cdots + g(s_n) \right]$$

選擇　　$n=10$　　$b=101$　　$a=100$

$$=\frac{1}{30}\left[g(100,1)+4g(100,2)+2g(100,3)+\cdots\right.$$
$$\left.+g(101)\right]$$

12－13

【解】 (a) $X(k)=(1-p_1)^{k-1}p_1$　　$Y(h)=(1-p_2)$

$$Z(s)=\sum_{k=1}^{s-1}(1-p_1)^{k-1}p_1(1-p_2)^{s-k-1}p_2$$

$$=p_1p_2\frac{(1-p_1)^{s-1}-(1-p_2)^{s-1}}{(1-p_1)-(1-p_2)}$$

$$=p_1p_2\frac{(1-p_1)^{s-1}\left[1-\left(\frac{1-p_1}{1-p_1}\right)^{s-1}\right]}{p^2-p^1}$$

(b) $$P(s=4)=\sum_{k=1}^{3}(1-0.1)^{k-1}(0.1)(1-0.2)^{3-k}(0.2)$$

$$=0.1(0.8)^2(0.2)+(0.9)(0.1)(0.8)(0.2)$$
$$+(0.9)^2(0.1)(0.2)$$
$$=0.0434$$

(c)若 $P_1=P_2$

$\Rightarrow p(s)=(1-p_1)^{s-1}p_1$

第十三章 樣本與抽樣分配

§13—1 導論

我們再來考慮以前曾討論過的一個問題，假設有一放射α一粒子的放射性物質且假定第八章所述的假設都仍成立。隨機變數X被定義爲某時間區間t內所放射的粒子數且以λt爲參數的卜瓦松分配。

爲了“使用”這機率模型來描述α一粒子的放射，我們必須知道λ的值，我們所做的假設僅能導出X爲參λt的卜瓦松分配這個結論，但如果我們想計算$P(X>10)$，除非我們知道λ值，否則須以λ表之，同樣本分配的其他參數如$E(X)$和$V(X)$亦須表爲λ的函數。

爲找出一個λ值。此時，我們至少須暫時離開理論的數學模型，而進入以觀察的經驗領域，亦即，我們必須實際去觀測放射粒子，獲得X的數值，然後利用這這些值於某系統方法以便獲取有關λ的訊息。

讀者對於經驗證實與應用數學推導之間的相互作用有個淸楚的概念是非常重要的，尤其是在爲觀察的現象建立一機率模型時更是特別重要。

讓我們考慮一很平常的三角幾何例子，如計算一棵樹的高度。假設此樹未知高度爲h，投影長s，角度α則此問題的數學模型可得爲$h=s\tan\alpha$，（如圖13－1），因此若能知S，α則由適合表格可查出h值，但要點是必先知道S，α才能計算出h。數學推導出$h=s\tan\alpha$的關係式與測量S，α的方法是彼此獨立的，若是S與α值測量正確則h將是正確值。換言之，我們不能單由三角幾何與三角函數表導出h值，而必須離開寶座實際去做些測量工作。然而如何去測得，並不影響數學推導的準確性。

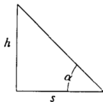


圖13－1

在使用機率模型上，我們亦必須實際去做些測量，例如使用卜瓦松分配的機率模型，我們需要知道參數值λ，因此我們必須依一系統方法去估計出入值，至於如何去做請參考第14章。

最終我們要強調的兩點是。第一，爲了要獲得有關λ的訊息所做的測量通常比直接去測量$e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$來得容易多。第二我們測量$\lambda$的方法以及如何使用這些測量值，並沒有限制了卜瓦松模型的適用性。

上例可說是多數此類問題的典型例子，在許多情形假設隨機變數X爲一特殊機率分配是相當適合的，我們已看過幾個例子，而這些例子指出對於X的機率行爲做些簡單的假設將導出一種明確的分配形式如二項式，指數，常態，卜瓦松等分配。這些分配的在一種均決定於某些參數，而在某些情況下參數的值是已知的

，但通常並無法全部知道所有參數值，在這種情況下，我們必須依照上述討論的步驟去獲得某些 X 的經驗數值，並且適當地去使用這些數值。至於如何去完成此項工作將在 14 章作進一步討論。

§13－2　隨機樣本 (Random Samples)

我們先前已經討論過關於有限個物品（物品母體）中作放回或不放回隨機抽樣的觀念。今考慮一特定的物品母體（人或機器製品，等等），對這些我們希望不用檢視每個物品就能對此物品做某些推論。於是我們就“抽樣”，亦即我們嘗試去由某些典型物品中獲知整個體的特性。讓我們更明確探討一下。

假設有限全體由 N 件物品組成，分別將此 N 件物品附上標號 $1, 2, \cdots\cdots N$，現在以下述方法選取幾件物品，定義下列隨機變數。

$$X_i = \text{第 } i \text{ 次取出的物品的標號} \quad i = 1, 2, \cdots\cdots n$$

隨機變數 $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ 的機率分配顯然決定於我們如何去抽取樣本，若抽樣再放回，每次隨機抽取一個物品，則隨機變數 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 爲獨立的均勻分配，亦即對於每個 X_i，$i = 1, 2 \cdots\cdots n$ 有

$$P(X_i = j) = \frac{1}{N}, \quad j = 1, 2 \cdots\cdots N$$

若抽樣不再放回，則隨機變數 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 不再彼此獨立，它們的聯合機率分配爲

$$P[X_1 = j_1 \cdots\cdots X_n = j_n] = \frac{1}{N(N-1)\cdots\cdots(N-n+1)}$$

其中 $j_1 \cdots\cdots j_n$ 爲 $(1, 2 \cdots\cdots N)$ 中的任意 n 個值。（我們可證明 X_i 的邊際分配，不管 $X_1 \cdots\cdots X_{i-1}, X_{i+1} \cdots\cdots X_n$ 之值，都和上述我們抽樣再放回的分配一樣。

到目前爲止我們所討論的，都是假設有一存在的有限全體 $1, 2 \cdots\cdots N$，並且由一大小爲 n $(n < N)$ 的樣本去獲取訊息。在很多情況下母體並不是有限的；事實上在定義任意一種母體時，我們可能碰到困難，且考慮如下的例子。

(a) 擲一枚硬幣，隨機變數 X＝正面的次數，我們可將 X_1 看爲由硬幣所有可能擲出所成的母體取出大小爲 1 的樣本。擲第二次硬幣時，定義 X_2 爲第二次擲出的正面次數。則 X_1，X_2 可視爲由同一母體取出之大小爲 2 的樣本。

(b) 1970 年某地的年降雨量定義爲隨機變數 X_1，往後的年度則爲 $X_2 \cdots\cdots X_n$，我們可將 $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 看爲某特定地區之所有可能年降雨量組成母體中取出大小爲 N 的樣本，事實上 X_i 亦可假定爲獨立且同一分配的隨機變數。

(c) 研究某一工廠利用某製造程序造出的燈泡壽命時，我們選取 n 個燈泡測量它們的壽命，爲 $T_1, T_2, \cdots\cdots T_n$ 我們可將 $(T_1 \cdots\cdots T_n)$ 看爲以某種程序製造出的燈泡的所有可能壽命組成的母體的隨機樣本。

【定義】　令 X 某機率分配的隨機變數，且令 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 爲 n 個彼此獨立的隨機變數且均有與 X 相同的分配，則我們稱 $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 爲由隨機變數

X 取出的隨機樣本。

【註】(a)上式比較不正式的說法是：由隨機變數 X 取出大小爲 n 的隨機樣本相當於在條件完全不變下 X 被重複測量 n 次。要使 X_1 與 X_2 有相同的分配，試驗所需的所有相關條件，當 X_1 與 X_2 被觀察時均須相同。當然試驗條件是不可能完全相同，但那些不同的條件應對試驗結果沒有多大或根本毫無影響，否則要獲得隨機樣本就必須相當小心譬如，假設我們考慮一隨機變數 X，它代表星期三下午4點到5點之間打入交換機的電話通數，爲了由 X 獲得隨機樣本，我們可隨機的選取 n 個星期三並記錄其數值 X_1，X_3 ……X_n，但必須確認這些星期三均具有代表性，而不是含有如耶誕節這種特殊的星期三。若隨機變數 X 爲依照某規格生產的電子產品的壽命，今欲自 X 中取一隨機樣本，則我們勿必確定在獲取這樣本值時這產品的生產並不是在故障時期的。

(b)如果 X 爲連續隨機變數，其 pdf 爲 f 且若 $X_1, \cdots X_n$ 是由 X 取出的隨機樣本，則 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 的 $joint\ pdf$ 可寫爲

$$g(X_1, X_2 \cdots\cdots X_n) = f(x_1) f(x_2) \cdots\cdots f(x_n)$$

如果 X 是個離散型隨機變數且 $P(x_i) = P(X = x_i)$ 則

$$P[X_1 = x_1 \cdots\cdots, X_n = x_n] = P(x_1) \cdots\cdots p(x_n)$$

(c)如前述的符號一樣，大寫字母代表隨機變數，小寫的字母則代表隨機變數的值，因此某一特殊樣本（$X_1 \cdots\cdots X_n$）的值可記爲（x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$），稱其爲樣本點（Sample point）。由此我們將（$x_1 \cdots\cdots x_n$）看作 n 維歐幾里法空間的點座標。

§13—3 統計量 (Statistics)

一但我們已經獲得隨機樣本值，我們往往想使用這些樣本值去推論這樣本所代表的母體，因爲描述機率分配特性的參數爲數字，因此我們當然想由樣本值去計算出某些適合的數學性質，以便使我們不知道的參數值有個合理的陳述，讓我們定義下面重要的觀念。

【定義】令 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 爲由隨機變數 X 抽出的隨機樣本，其樣本值爲 $x_1 \cdots\cdots x_n$，令 H 爲 n 元（$x_1 \cdots\cdots x_n$）函數，假設值 $y = H(x_1 \cdots\cdots x_n)$，則我們定義 $Y = H(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 爲一統計量。換句話說：統計量爲樣本的實數函數，有時我們捨函數值不說而只說統計量，因此當我們要說 y 是統計量 $Y = H(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 的值時，我們可以說統計量 $y = H + (x_1 \cdots\cdots x_n)$。

【註】(a)上面所述有關統計量的使用雖然很特殊，仍却廣範的被接受，注意我們以單數使用之。

(b)根據上述定義，一個統計量是一種隨機變數，這點必須永記上頭，

因此考慮統計量的分配，統計量的期望值，變異數都將有意義，事實上當隨機變數是個統計量，亦即是樣本函數時，我們說其爲樣本分配而不說機率分配。

正如本章開頭所提示過的，我們將由樣本獲得的資料用以估計與機率分配有關的未知參數值。我們且將發現某些統計量在這類問題的解答中扮演一份相當重要的角色，在吾人尚未對此問題詳細討論以前，讓我先來研究幾個重要統計量及其性質。

§13—4　重要的統計量　(Some Important Statistic)

在此我們列舉 n 個常會遇到的統計量，並討論與性質。

【定義】　令（X_1 ……X_n）爲取出隨機變數X的一個隨機樣本，下述統計量是很有用的。

(a) $\bar{X}=(\frac{1}{n})\sum_{i=1}^{n}X_i$ 稱爲樣本平均數（Sample mean）

(b) $S^2=[\frac{1}{(n-1)}]\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 稱爲樣本變異數（Sample Variance）（很快我們就會說明爲何除以 $n-1$ 而不除以 n）。

(c) $K=min(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 稱爲樣本極小值（minimum of the sample）。

(d) $M=max(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 稱爲樣本極大值（maximum of the sample）。

(e) $R=M-K$ 稱爲樣本的全距（Sample range）。

(f) $X_n^{(j)}$ = 樣本中第 j 大的觀測值，$j=1，2 \cdots\cdots n$。

（所以 $X_n'=M$，$X_n^{(n)}=K$）

【註】　(a)隨機變數 $X_n^{(j)}$ $j=1，2 \cdots\cdots n$ 稱爲與隨機樣本 X_1 ……X_n 有關的次序統計量（order statistics），若X爲連續性隨機變數，我們可假定 $X_n^{(1)}<X_n^{(2)}<\cdots\cdots<X_n^{(n)}$。

(b)樣本的極端值（如上 $X_n^{(1)}$ 與 $X_n^{(n)}$）常被感興趣，例如在建造水埧時洪水量的控制上某一河流到達過去 50 年來的最高洪水位將是一很重要的。

當然我們仍會遭遇許多其他重要的統計量：但上述這些統計量很肯定的將在統計應用上扮演一個重要角色，在此我們將闡述一些與上述統計量有關的定理。

【定理13－1】令X為隨機變數，其期望值$E(X)=\mu$，變異數$V(X)=\sigma^2$且令$\overline{X}$為大小為n隨機樣本的平均數，則

(a)$E(\overline{X})=\mu$

(b)$V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(c)當n很大，則$\dfrac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$有近似於$N(0.1)$的分配。

【證明】 (a)(a)與(b)由前述建立的期望值與變異數性質得。

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

(b)因為X_i間彼此獨立，所以

$$V(\overline{X})=V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

(c)直接利用中央極限定理，我們可寫$\overline{X}$為獨立分配的隨機變數和，即

$\overline{X}=\frac{1}{n}X_1+\cdots\cdots+\frac{1}{n}X_n$。

【註】 (a)當樣本大小n增大，則樣本平均數$\overline{X}$的變化愈來愈小，這用在數據上的經驗很直覺的可以顯示出，例，下面有18個數字。

－1，3，2，－4，－5，6，7，2，0，1，－2，－3，8，9，6，－3，0，5

若我們依序取兩者平均值，得如下

1，－1，0.5，4.5，0 5，－2.5，8.5，1.5，2，5

若我們由原來數據依序取三者平均值，得

1.3，－1，－1.3，7，7，0.7

最後，若我取六者平均值，得

0.2，0.8，4.1

這些組平均數的變異均較前一組為小，因為在每一情況的平均數都由幾個數目所決定。而上面的定理明白指出當n增大時，$\overline{X}$的變異數是如何的減少。

(b)如果n不夠大到去使用中央極限定理，我們可以直接尋求$\overline{X}$的正確機率分配，在12－5節內我們曾提示一種方法來求出隨機變數和的機率分配。重複應用這個方法，尤其n相當小時，我們可以獲取$\overline{X}$的機率分配。

(c)定理(13－1)顯示，若n足夠大，則樣本平均數$\overline{X}$近似於常態分配。

我們發覺不祇是$\overline{X}$而且大部份“表現好”(well-bebaved)的$\overline{X}$函數也有

這種性質。照目前的水準而言，我們無法對此結果做進一步的分析，然而這結果在很多方面的應用裡相當重要，至少須給予一個啓示性的說明。

假設$Y = r(\overline{X})$且r可展爲μ的泰勒級數（Taylar Series），所以$r(\overline{X}) = r(\mu) + (\overline{X} - \mu) r(\mu) + R$此$R$爲餘項且可表爲$R = \left[\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{2} \right] r''(z)$，此$z$爲在$X$與$\mu$間的某一値，若$n$夠大則$\overline{X}$將趨近於$\mu$，因此$(\overline{X}-\mu)^2$將比$(\overline{X}-\mu)$小很多，因爲當$n$很大所以我們可將$R$略而不計則$r(\overline{X})$的近似式如

$$r(\overline{X}) \simeq r(\mu) + r'(\mu)(\overline{X} - \mu)$$

我們可以看出當n足夠大時，$r(\overline{X})$的近似式爲X的線性函數，而因爲當n大時$\overline{X}$近似於常態所以$r(\overline{X})$也將近似於常態，這是因爲常態隨機變數的線性函數仍是常態分配。

由上面$r(\overline{X})$所表示的，我們得

$$E[r(\overline{X})] \simeq r(\mu), \quad V[r(\overline{X})] \simeq \frac{[r'(\mu)]^2 \sigma^2}{n}$$

由此知，若n足夠大則$r(\overline{X})$將近似於$N\{r(\mu), [r(\mu)]^2 \frac{\sigma^2}{n}\}$的分配。

【定理13－2】令X爲一連續性隨機變數，其pdf爲f，cdf爲F，且令$X_1 \cdots\cdots X_n$爲取自X的隨機樣本，而K與M分別爲極小及極大的樣本，則

(a)M的pdf爲$g(m) = n[F(m)]^{n-1} f(m)$。

(b)K的pdf爲$h(k) = n[1 - F(k)]^{n-1} f(k)$。

【證明】　令$G(m) = P(M \leq m)$爲Mのcdf，若$\{M \leq m\}$相當於事件$\{X_i \leq m$，對所有$i\}$，由於因爲X_i是彼此獨立的，我們得

$$G(m) = P[X_1 \leq m \text{且} X_2 \leq m \cdots\cdots X_n \leq m] = [F(m)]^n$$

於是　$g(m) = G'(m) = n[F(m)]^{n-1} f(m)$

K的pdf的導數留待讀者自證（見習題13－1）。

【例題13－1】電子儀器壽命長T爲參數$\alpha = 0.001$的指數分配，亦即，其pdf是$f(t) = 0.001 e^{-0.001t}$，假設有100個此種儀器接受試驗，得其觀察值$T_1 \cdots\cdots T_{100}$。

(a)試問$950 < \overline{T} < 1100$之機率爲何

因爲這樣本大小相當大，我們利用中央極限定理得

$$E(\overline{T}) = \frac{1}{0.001} = 1000, \quad V(\overline{T}) = \frac{1}{100}(0.001)^{-2} = 10{,}000$$

因此$\frac{(\overline{T} - 1000)}{100}$有近似於$N(0.1)$的分配，則由常分配表得

$$\begin{aligned} P(950 < \overline{T} < 1100) &= P\left(-0.5 < \frac{\overline{T} - 1000}{100} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0.5) \\ &= 0.532 \end{aligned}$$

【註】 (a)在目前情況，吾人可以不用中央極限定理求得$\overline{T}$的正確分配，我們在定理（10－9）證明過獨立指分配的隨機變數和有－Gamma分配，亦即

$$g(s)=\frac{(0.001)^{100}S^{99}e^{-0.001s}}{99!}$$

其中g爲$T_1+\cdots\cdots+T_{100}$的pdf，因此$\overline{T}$的pdf爲

$$f(t)=\frac{(0.1)^{100}t^{-99}e^{-0.1\bar{t}}}{99!}$$

所以T爲－Gamma分配，其參數爲0.1與100 。

(b)最大觀測值超過7200小時的機率？

我們求$P(M>7200)=1-P(M\leq 7200)$然而，若且唯若每個樣本值小於7200則極大值小於7200因此

$$P(M>7200)=1-[F(7200)]^{100}$$

計算$F(7200)$時，回憶一下指數分配隨機變數的參數爲0.001，則$F(t)=1-e^{-0.001t}$，所以得

$$F(7200)=1-e^{-0.001(7200)}=1-e^{-7.2}=0.99925$$

因此機率爲$1-(0.99925)^{100}=0.071$

(c)失效時間最小值小於10小時的機率？

我們求$P(K<10)=1-P(K\geq 10)$

若且唯若每個樣本值大於或等於10，則樣本最小值將大於或等於10小時，所以

$$P(K<10)=1-[1-F(10)]^{100}$$

利用如上式(b)所表的F我們得

$$1-F(10)=e^{-0.001(10)}=e^{-0.01}=0.99005$$

所以$P(K<10)=1-(0.99005)^{100}=0.63$

上例的(c)部份可推廣爲下面的定理。

【定理13－3】 令X爲指數分配，其參數爲α且令$(X_1\cdots\cdots X_n)$爲取自X的隨機樣本，若令$K=min(X_1\cdots\cdots X_n)$則$K$仍是指數分配，但其參數爲$n\alpha$。

【證明】 令H爲K的cdf則

$$H(K)=P(K\leq k)=1-P(k>k)=1-[1-F(K)]^n$$

其中F爲X的cdf，今$F(x)=1-e^{-\alpha x}$，則$H(K)=1-e^{-n\alpha k}$對k取$H(K)$的導數得$h(k)=n\alpha e^{-n\alpha k}$。

【註】 本定理亦可推廣爲：若$X_1\cdots\cdots X_n$爲獨立的隨機變數，且若X_i有參數爲α_i，$i=1,2\cdots\cdots n$的指數分配，則$K=min(X_1\cdots\cdots X_n)$有參數爲$\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n$的指數分配。證明見習題（13－2）。

【定理13－4】 假設$X_1\cdots\cdots X_n$爲一取自X的隨機樣本，其平均數μ變異數σ^2。令

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

其中$\overline{X}$爲樣本平均數，於是我們得

(a)$E(S^2)=\sigma^2$

(b)若X爲常態分配$\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2}\right]S^2$，有自由度爲$n-1$的$Chi$-$square$分配

【證明】 (a)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2\\&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)^2+2(\mu-\overline{X})(X_i-\mu)\\&\quad+(\mu-\overline{X})^2]\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+2(\mu-\overline{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\\&\quad+n(\mu-\overline{X})^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n(\mu-\overline{X})+n(\mu-\overline{X})^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\end{aligned}$$

所以$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right]=\sigma^2$

註：若定義S^2時是除以n而不是$n-1$則就沒上述這性質。

(b)此部份我們不證明，但只考慮下述特殊情況以爲說明。考慮，$n=2$，則
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2&=(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\\&=\left[X_1-\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]^2+\left[X_2-\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]^2\\&=\frac{1}{4}[2X_1-X_1-X_2]^2+\frac{1}{4}[2X_2-X_1-X_2]^2\\&=\frac{1}{4}[(X_1-X_2)^2+(X_2-X_1)^2]\\&=\frac{[X_1-X_2]^2}{2}\end{aligned}$$

因爲X_1與X_2均具有$N(\mu,\sigma^2)$的獨立分配，我們發現(X_1-X_2)有$N(0.2\sigma^2)$的分配。因此

$$\left[\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right]^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}(X_i-\overline{X})=\frac{1}{\sigma^2}S^2$$

有自由度為1的Chi-$square$分配(見定理10－8)。

以下類推可以得到一般n的證明：我們必須證明 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ 可以分解為($n-1$)個$N(0.1)$分配的獨立隨機變數的平方和。

註：雖然S^2被定義為n項平方和，但這n項並非獨立，事實上，

$(X_1-\overline{X})+(X_2-\overline{X})+\cdots\cdots+(X_n-\overline{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i-n\overline{X}=$ 0，因此在這n項間有線性關係存在，只要其中任意($n-1$)項已知，則第n項也就被決定了。

最後，我們闡述一下(不證明)關於樣本全距為R的機率分配。

【定理**13－5**】令X為連續性隨機變數，其pdf為f，且令$R=M-K$為根據樣本大小為n的樣本全距，則R的pdf為

$$g(r)=n(n-1)\int_{s=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x=s}^{s+r}f(x)dx\right]^{n-2}f(s)f(s+r)\,ds,\qquad 當\ r\geq 0$$

【例題**13－2**】隨機電壓V為〔0.1〕的均勻分配，取大小為n的樣本，V_1，$V_2\cdots\cdots V_n$，計算樣本全距R，則R的pdf為

$$g(r)=n(n-1)\int_{s=-\infty}^{+\infty}r^{n-2}f(s)f(s+r)ds$$

當$0\leq S\leq 1$，且$0\leq s+r\leq 1$，亦即$0\leq s\leq 1-r$，則我們得$f(s)=f(s+r)=1$

所以
$$k(r)=n(n-1)\int_{0}^{1-r}r^{n-2}ds$$
$$=n(n-1)r^{n-2}(1-r)\qquad 0\leq r\leq 1$$

當$n>2$時，R之pdf的圖形如圖13－2所示。注意當$n\to\infty$時，極大值的發生點r將向右移動。因此當樣本大小n增大時，我們將很直覺的體會出R趨近1的可能愈來愈大。

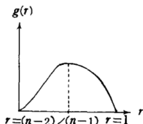


圖13－2

§13－5 積分變換 (The Integral Trnusform)

抽取X的隨機樣本可以獲得一些有關X機率分配之未知參數的訊息(information)，而且，一個樣本可有許多種用途。我們可以觀測一個其分配已完全被指定的隨機變數，然後利用這樣本值去近似估計一些很難直接由數學演算求得的機率。譬如說，假設X有$N(0.1)$分配，而我們要研究隨機變數$Y=e^{-x}\sin X$特別是假設要算$P(0\leq Y\leq\frac{1}{2})$，為了要求得精確答案，我們必先求出$Y$的$cdf$

G，然後算出$G(\frac{1}{2})-G(0)$，但這樣做必將遭遇很大的困難。然而，我們可以另謀他法，模擬可以產生隨機變數Y的試驗，然後再利用這得到的相對頻數去約略估計欲求的機率。而且如果這相對頻數有足夠大的觀測數目，則用大數法則可以證明我們的方法。

假設自一完全被指定分配的隨機變數X中抽取一隨機樣本$X_1 \cdots\cdots X_n$。對任一隨機變數X_i的定義為$Y_i=e^{-X_i}\sin X_i$，然後我們計算其相對頻數$\frac{n_A}{n}$，其中n_A為滿足$0\leq y_i\leq\frac{1}{2}$時y_i的個數，因此$\frac{n_A}{n}$等於事件$0\leq Y\leq\frac{1}{2}$的相對頻數，若n甚大，由大數法則知，這相對頻數將趨近於$P〔0\leq Y\leq\frac{1}{2}〕$。

為了實驗上述方法，我們必須找出一種方法，由分配為$N(0.1)$的隨機變數中產生一個隨機樣本$X_1 \cdots\cdots X_n$。在未指出怎麼做以前，讓我先簡略的來討論一種分配，而此工作可藉圖表來完成，假設X為在〔0.1〕的均勻分配，為了要由X獲取隨機樣本，我們只需翻到隨機號碼表（Table of Random numbers）（見附錄），因為這些隨機號碼表卽應這種目地而編纂的。使用這些表時，我們任意由其中找一個位置，然後沿着行或列獲取數字。若要利用這些數字代表在0與1間的數值，只需要在前面加個小數點卽可。如4573卽可表為0.4573，……等。

這些隨機號碼表使得我們輕易的得到任意隨機變數的隨機樣本，下述定理將明白告訴我們。

【定理13－6】 令X為一隨機變數，其pdf為f，cdf為F〔假定$f(x)=0$，如$x \notin (a,b)$〕，令Y定義$Y=F(X)$的隨機變數，則Y在〔0.1〕為均勻分配（Y被稱為X的積分變換 Integral Transform）。

【證明】 因X為一連續性隨機變數，所以其cdf F是個連續性嚴格單調函數且有反函數F^{-1}，亦卽，$Y=F(X)$可解為$X=F^{-1}(Y)$（見圖13－3）〔當$x\leq a$時，若$F(x)=0$，則定義$F^{-1}(0)=a$同理，當$x\geq b$，若$F(x)=1$則定義$F^{-1}(1)=b$〕。

令G為隨機變數Y的cdf，則

$$\begin{aligned}G(y)&=P(Y\leq y)\\&=P(F(X)\leq y)\\&=P(X\leq F^{-1}(y))\\&=F(F^{-1}(y))=y\end{aligned}$$

因此Y的pdf $g(y)=G'(y)=1$，卽得結果。

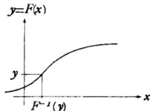


圖13－3

註：(a)首先我們約略描述如何實際觀測一隨機變數Y的值。我們先

觀測隨機變數X的一值x，然後以$y=F(x)$，計算$Y=F(X)$ 之值其中F（已知）為X的cdf。

(b)定理 13－6 所敍述的不僅適用於連續性亦適用於離散性隨機變數。但上述證明則需稍加修改，因為離散性隨機變數的cdf為梯形函數（Step function），且沒有唯一的反函數。

現在我們可應用上面的結果以產生有特定分配的隨機變數的隨機樣本，我們仍只再考慮連續性的情況，令隨機變數X的cdf為F，我們由X抽取一樣本，令y_1是由隨機號碼表得來的一值（在 0 和 1 之間），因在〔0.1〕$Y=F(X)$為均勻分配，我們可以視y_1為隨機變數的一觀測值，解式$y_1=F(x)$得到x_1，（若X為連續性，則這是可能的），我們可獲cdf為F的隨機變數的一值。同樣由隨機號碼表用$y_2 \cdots\cdots y_n$可得$x_2 \cdots\cdots x_n$。因此我們可得式$y_i=F(x_i)$的解x_i，$i=1$，……n，我們所需要的樣本值。

【例題**13－3**】假設要從分配為$N(2, 0.09)$的隨機變數中抽取大小為 5 的一個樣本，假設我們由隨機號碼表得到下列值 0.487，0.722，0.661，0.194，0.336 則x_1的定義為

$$0.487=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.3)}\int_{-\infty}^{x_1} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-2}{0.3}\right)^2\right]dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{(x_1-2)}{0.3}} exp\left(\frac{-s^2}{2}\right)ds=\Phi\left(\frac{x_1-2}{0.3}\right)$$

由常態分配表得$\frac{(x_1-2)}{0.3}=-0.03$，所以$x_1=(-0.03)(0.3)+2=1.991$，此數表這特定分配的第一個樣本值。同樣方法我們可求得其他四個樣本值 2.177，2.124，1.742，1.874 。

上面方法可推廣為：為從$N(\mu, \sigma^2)$分配中獲取一樣本值x_1， 我們先由隨機號碼表得y_1（在 0 和 1 之間），則要求的x_1決定於$\Phi\left[\frac{(x_1-\mu)}{\sigma}\right]=y_1$

【 註 】 (a)關於由特定分配中產生隨機樣本除了上述外，仍有其他不同的方法（見習題13－8）。

(b)由於獲得很大樣本的可能，使得這“模擬”方法相當有用，尤其是電子計算機的利用，此模擬方法更是行得通。

【例題**13－4**】固體推進燃料系統的火箭推力T為幾個變數的複雜函數。如X＝口徑面積，Y＝燃燒率因數，Z＝固體推進燃料面積，W＝固體推進燃料的密度，n＝燃燒係數，C_i＝常數，$i'=1$，2，3，我們可表T為

$$T=C_1\left(\frac{X}{YwZ}\right)^{\frac{1}{(n-1)}}X+C_2\left(\frac{X}{YwZ}\right)^{\frac{1}{(n-1)}}+C_3$$

由於先前的探討知我們可假設X，Y，Z，W爲獨立常態機變數而且它們平均數與變異數均已知。因爲X，Y，W．Z與T之間關係太複雜，因此任何想獲得隨機變數T的機率分配或$E(T)$，$V(T)$的正確表示的企圖都將受到阻撓。

若我們能夠產生一個X，Y，Z，W的隨機樣本（X_i，Y_i，Z_i，W_i）我們就能產生一個T的大樣本（T_1……T_n）然後再去研究隨機變數T的特性。譬如，若我們想求$P(a\leq T\leq b)$，應用大數法則我們只要由樣本中獲得事件$\{a\leq T\leq b\}$之相對頻數，即有理由確信這相對頻數與所欲求的機率相差很微小。

到目前爲止我們所討論的都是在很大觀測值上，以相對頻數來近似的估計正確機率。然而，我們所提示的方法亦可用以約略估計本質上完全不足機率問題的解答，在此我們只指出這類問題的一型。通常所用的方法稱爲"*Monte-Carlo*"之法。下例取自*E.F. Beekeuback*著的*Modein Mathematics for the Engineer*第12章對*Monte-Carlo*法有很好的描述。

【例題13－5】假設我們不用簡易的微積分求出$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$。我們可利用下述的方法。由隨機號碼表獲取在〔0.1〕上均勻分配。隨機變數的隨機樣本，假定這樣本值爲0.69，0.37，0.39，0.97，0.66，0.51，0.61，0.41，0.76與0.09因爲欲求的積分表$E(X)$，其中X爲均勻分配的隨機變數，所以由樣本的算術平均數來近似估計$E(X)$似乎很合理，我們得$\overline{X}=0.545$（若樣本愈大，則愈有理由獲取一較正確的值）。

以上僅概略敘述一下許多*Monte-Carlo*法的基本觀念，這些方法已很成功的被應用於計算複雜區域的多重積分以及解答某些微分方程上面。

【註】如同13－5節所述，由任一種分配上獲取樣本的方法可能相當煩複。但由於常態分配的重要性，表格的利用（見附錄表7）可以省略掉上面所述之主要演算部份，表7直接列舉$N(0.1)$的樣本，這些樣本值稱爲常態差異（Nomal deviates），如果需要由$N(0.1)$分配得n個樣本值x_1……x_n，則可直接由表7讀出，（如同使用隨機號碼表一樣，選取一個適合的開始位置）。

很顯然的，此表可用以任一常態分配$N(\mu,\sigma^2)$獲取樣本，只要將x_i乘以σ再加上μ即可獲得這分配的樣本值$y_i=\sigma x_i+\mu$。

習題

13－1　證明定理13－2(b)。

13－2　如果X_1，……，X_n是獨立隨機變數，每個有參數是α_i，$i=1$，2，……n之指數分配，如果$K=min(X_1,\ldots\ldots,X_n)$，則$K$有參數是$\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n$之指數分配（見定理13－3）。

13－3　假設X有參數是p的幾何分配，令X_1，……，X_n是X之隨機樣本，

$M = max(X_1, \ldots\ldots, X_n)$，$K = min(X_1, \ldots\ldots, X_n)$，試求$M$和$K$的機率分配〔Hint $P(M = m) = F(m) - F(m-1)$，而F是M的cdf〕。

13－4 由分配是$N(12, 4)$之隨機變數抽取5個樣本
(a)問樣本平均值超過13之機率爲何？
(b)樣本極小值少於10之機率爲何？
(c)樣本極大值大於15之機率爲何？

13－5 產品的壽命是參數是$\beta = 0.001$之指數分配，試驗6件產品且記錄其壽命
(a)沒有產品壽命短於800小時的機率爲何？
(b)沒有產品壽命長於3000小時的機率爲何？

13－6 假設X有分配$N(0, 0.09)$，由X抽取25件樣本，X_1，X_2，……，X_{25}，問$\sum_{i=1}^{25} X_i^2 > 1.5$的機率多少？

13－7 利用隨機數表獲得下列分配之隨機變數之8個樣本
(a)參數是2之指數分配。
(b)自由度爲7之*chi-square*分配。
(c)$N(4, 4)$。

13－8 在13－5節裏，我們指出一種方法以獲得有特定分配之隨機變數的隨機樣本。也有其他方法，尤其是有計數器可利用的時候，下面是這樣的一種方法。假設我們要獲得自由度$2k$之*chi-square*隨機變數的隨機樣本，我們先獲得均勻分配在$(0, 1)$上之隨機變數的k個樣本U_1，U_2，……，U_k，然後計算$X_1 = -2\log(U_1 U_2, \ldots\ldots, U_k) = -2\sum_{i=1}^{k}\log(U_i)$。隨機變數$X_1$將有所要的分配，這個下面會加以說明。我們繼續這樣做下去，再獲取其他k個樣本，於是得到X_2，爲了證明上面的陳述，我們如下進行
(a)求$-2\log(U_i)$之mgf，這兒U_i均勻分配在$(0, 1)$上。
(b)求$-2\sum_{i=1}^{k}\log(U_i)$之$mgf$這兒$U_1$，$U_2$，……$U_k$是獨立且均勻分配在$(0, 1)$上。比較此$m.g.f$與*chi-square*分配之$mgf$，因此得到所要的結論。

13－9 利用習題13－8所說的要領，獲得分配χ^2_8之3個隨機樣本。

13－10 X均勻分配在$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$上，獲取$X$之$n$個樣本且計算其樣本平均值$\bar{X}$，問$\bar{X}$之標準差多少？

13－11　由期望值是20，變異數是3的常態隨機變數分別抽取10和15個獨立隨機樣本，問此兩組樣本平均數相差大於0.3的機率為何？

13－14　利用常態差異表（附表7）且獲取有分配$N(1，4)$之隨機變數X的30個隨機樣本，利用此樣本回答下面的問題

(a)比較$P(X \geq 2)$與此事件的相對頻數。

(b)分別拿1和4與X和S^2比較。

(c)劃$F(t)=P(\overline{X} \leq t)$之圖形。利用同一座標系，劃實驗分配函數（empirical distribution function）F_n之圖形。此F_n定義為

$$F_n(t)=0 \qquad \text{if} \quad t<X^{(1)}$$
$$=\frac{k}{n} \qquad \text{if} \quad X^{(k)} \leq t \leq X^{(k+1)}$$
$$=1 \qquad \text{if} \quad t \geq X^{(n)}$$

這兒$X^{(i)}$表樣本之第i大的觀察值。

〔函數F_n時常被用以估計cdf F。我們可證明在某些條件下$\lim_{n\to\infty} F_n(t)=F(t)$〕。

13－13　令X有標準常態分配$N(0，1)$，由附表7獲得此種分配之20個樣本。令$Y=|X|$

(a)利用此樣本比較$P(1<Y \leq 2)$與此事件之相對頻數。

(b)比較$E(Y)$與$\overline{Y}$。

(c)比較Y的cdf $F(t)=P(Y \leq t)$與Y的empirical cdf F_n。

13－14　假定X有分配$N(2，9)$，令$X_1，\cdots\cdots，X_{20}$是由附表7得到的隨機樣本，計算

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

且與$E(S^2)=9$比較。

13－15　令X有標準常態分配$N(0，1)$而$X_1，\cdots\cdots，X_{30}$是由附表7得到的隨機樣本，試求$P(X^2 \geq 0.10)$且與此事件的相對頻數比較。



13－1

【解】$H(k)=1-p(K \geq k)$

$$=1-p(K_1 \geq k，K_2 \geq k_1，\cdots\cdots，K_n \geq k)$$
$$=1-p(K_1 \geq k)p(K_2 \geq k)\cdots\cdots p(K_n \geq k)$$
$$=1-[1-F(k)]^n$$

$h(k)=H'(k)=n[1-F(k)]^{n-1}f(k)$

13－2

【解】 $H(k)=1-p(K>k)$

$=1-(1-F_1(k))(1-F_2(k))\cdots\cdots(1-F_n(k))$

$=1-e^{-\alpha_1 k}e^{-\alpha_2 k}\cdots\cdots e^{-\alpha_n k}$

$=1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)k}$

$h(k)=(\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n)e^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)k}$

故K為指數分配，常數為$\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n$

13－3

【解】 $F(m)=p(M\le m)$

$=p(X_1\le m, X_2\le m, \cdots\cdots, X_n\le m)$

$=p(X_1\le m)p(X_2\le m)\cdots\cdots p(X_n\le m)$

$$p(X_1\le m)=\sum_{x_1=1}^{m}q^{x_1-1}p=p\frac{1-q^m}{1-q}=1-q^m$$

故$F(m)=(1-q^m)^n$

$\therefore p(m)=F(m)=F(m-1)=(1-q^m)^n-(1-q^{m-1})^n$

$K=min(X_1\cdots\cdots X_n)$

$H(k)=1-p(K\ge k)$

$=1-[1-p(X_1\le k)][1-p(X_2\le k)]\cdots\cdots\cdots\cdots$

$[1-p(X_n\le k)]$

$=1-(q^k)^n$

$\therefore p(k)=H(k)-H(k-1)=q^{(k-1)n}-q^{kn}$

13－4

【解】 (a) $E(\overline{X})=E(X)=12$ $\qquad V(\overline{X})=\frac{4}{5}=0.8$

$P(\overline{X}>13)=1-p(\overline{X}\le 13)$

$$=1-\Phi\left(\frac{13-12}{\sqrt{0.8}}\right)=1-\Phi(1.11)$$

$=0.1335$

(b) $P(K\le 10)=1-[1-F(10)]^5$

$=1-[1-0.1587]^5=0.5804$

$$(\because F(10)=\phi\left(\frac{10-12}{2}\right)=\phi(-1)=0.1587)$$

(c) $P(M\ge 15)=1-\phi(15)=1-[F(15)]^5$

$$=1-[\Phi(\frac{3}{2})]^5=0.294$$

13－5

【解】 (a) $P(t_1 \geq 800, t_2 \geq 800, \ldots\ldots t_6 \geq 800)$

$= p(t_1 \geq 800)\,p(t_2 \geq 800)\cdots\cdots p(t_6 \geq 800)$

$= [e^{-800(0.001)}]^6 = e^{-4.8}$

$= 0.0082$

(b) $P(t_1 \leq 3000, \ldots\ldots, t_6 \leq 3000)$

$= [1 - e^{-3000(0.001)}]^6$

$= (1 - e^{-3})^6 = 0.77$

13－6

【解】 設 $Y_i = X_i^2$，$i = 1, \ldots\ldots\ldots, 25$

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i}{0.3})^2}$$

$$g(Y_i) = \frac{1}{2\sqrt{y_i}}[f(\sqrt{y_i}) + f(-\sqrt{y_i})]$$

$$= \frac{1}{0.3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{y_i}} e^{-\frac{y_i}{2(0.09)}}$$

設 $Z_i = \dfrac{y_i}{0.09}$

$h(Z_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{z_i}} e^{-\frac{z_i}{2}}$ 故 z_i 為卡方 X_1^2 分配

$\therefore E(z_i) = 1$ $\qquad V(z_i) = 2$

$E(y_i) = 0.09$ $\qquad V(y_i) = 2 \times (0.09)^2 = 0.0162$

$E_{25}(y) = 25 \times 0.09 = 2.25$

$V_{25}(y) = 0.405$

$$P(\sum_{i=1}^{25} X_i^2 \geq 1.5) = 1 - \Phi(\frac{1.5 - 2.25}{\sqrt{0.405}})$$

$$= 1 - \Phi(-1.2) = 0.89$$

13－7

【解】 (a) $f(x) = 2e^{-2x}$

$$F(x) = \int_0^x 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big|_0^x = 1 - e^{-2x}$$

$$x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\ln(1 - F(y))$$

由定理知 $F(x)$ 為均勻分配於 [0，1]

故由隨機數字表取 8 個樣本，並取其絕對值。

$F(x)$: 0.07018　0.31172　0.12572　0.23908
0.55216　0.85366　0.56223　0.09300

$x\ (=-\frac{1}{2}\ ln\ (1-F))$:

0.03615　0.1185　0.0665　0.138
0.401　0.960　0.4135　0.0476

(b) X_7^2 · $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{7}{2}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$$=\frac{2}{15\sqrt{2\pi}}x^{\frac{5}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y=F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$$

故樣品之取法同(a)先取 8 個分配於〔0，1〕之隨機數，再以 $X=F^{-1}(y)$ 得 x 的 8 個樣本。

(c) $N(4,4)$

$$y=F(x)=\phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$$

$F(x)$：同(a)之樣本

x: 1.06　3.02　1.70　2.58
4.26　6.10　4.32　1.36

13－8

【解】 設 $y_i=-2\ lnU_i$

$My_i(t)=E(e^{ty_i})=E(e^{t(-2\ln U_i)})$

$$=\int_0^1 U_i^{-2t}\,dU_i$$

$$=(1-2t)^{-1}=(1-2t)^{-\frac{2}{2}}$$ 自由度爲2

$$Z=-2\sum_{i=1}^{k} lnU_i$$

$M_z(t)=My_1(t)My_2(t)\cdots\cdots My_k(t)$

$$=(1-2t)^{-\frac{2k}{2}}$$ (*reproductive property*)

故 Z 之分配爲自由度 $2k$ 之卡方分配

13－9

【解】
Ⅰ　0.070　0.311　0.125　0.239
Ⅱ　0.552　0.853　0.562　0.093

Ⅲ　0.945　0.181　0.524　0.656

$\therefore X_1 = -2\ ln\ (0.070 \times 0.311 \times 0.125 \times 0.239)$

$= 10.05$

$X_2 = -2\ ln\ (0.552 \times 0.853 \times 0.562 \times 0.093)$

$= 6.4$

$X_3 = -2\ ln\ (0.945 \times 0.181 \times 0\ 524 \times 0.656)$

$= 2.835$

13－10

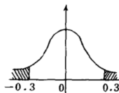
【解】 因X均勻分配於$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$故

$E(X) = 0$　　　　$V(X) = \frac{1}{12}$

$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　　　$E(X) = 0$

$V(X) = \frac{1}{12n}$　　　　$\sigma = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{3n}}$

13－11



【解】 $E(X_{10}) = E(X_{15}) = 20$，

$V(X_{10}) = 0.3$，$V(X_{15}) = 0.2$

$Z = X_{10} - X_{15} \sim N(20-20,\ 0.3+0.2) = N(0.05)$

$P(|Z| \geq 0.3) = 2P(Z < -0.3)$

$= 2\Phi(\frac{-0.3}{\sqrt{0.5}})$

$= 2\Phi(-0.4243) = 0.6708$

13－12

【解】 由隨機數字取30樣本x，$y = 2x+1$，則y為$N(1,4)$分配。

x	y	x	y	x	y
0.31	1.62	0.90	0.80	0.22	1.44
−0.51	−0.02	−0.36	0.28	0.58	2.16
−1.45	−1.90	0.33	1.66	0.87	2.74
−0.35	0.30	−0.28	0.44	−0.02	0.96
0.18	1.36	0.30	1.60	0.04	1.08
0.09	1.18	−2.62	−4.24	0.12	1.24
0.00	1.00	−1.43	−1.86	−0.17	0.66
0.11	1.22	−1.79	−2.58	0.78	2.52
−1.91	−2.82	−0.99	−0.98	−1.31	−1.62
−1.07	−1.14	−0.35	0.30	0.95	2.90

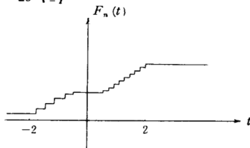
(a) $P(X \geq 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 0.31$

P（樣本$X \geq 2$）$= \frac{5}{30} = 0.166$（5個≥2）

(b) $X = 0.411 < 1$

$S^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (X_i - X)^2 = 4.2 > 4$

(c)



13－13

【解】 (a) $P[1 < y \leq 2] = p[1 < x \leq 2] + p[-2 \leq x < -1]$
$= 2[\Phi(2) - \Phi(1)] = 0.272$

P〔樣本$1 < y \leq 2$〕$= \frac{5}{20} = 0.25$（由本題樣本）

(b) $E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} -xf(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

$= 2\int_{0}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

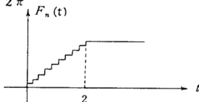
$S = \frac{x^2}{2} \qquad ds = x\ dx$

$E(y) = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,ds$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-s})\Big|_{0}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = 0.79$

$\bar{y}$（樣本）$= 0.756$

(c) $F(t) = p(y \leq t)$
$= p(0 \leq x \leq t)$
$+ p(-t \leq x \leq 0)$
$= 2[\Phi(t) - \Phi(0)]$



13－14

【解】　由表7取20數字y_1，……y_{20}

令$X_i = 3y_i + 2$即爲所需之樣本

$$S^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)^2 \simeq 8.5$$（由12題之樣本）

13－15

【解】　由12題之樣本知

$$P（樣本X^2 \geq 0.10）= \frac{18}{30} = 0.6$$

$$P(X^2 \geq 0.10) = p\left(X \geq \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + p\left(X \leq \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right]$$

$$= 2\left[1 - \Phi(0.32)\right]$$

$$= 0.75$$

第十四章 参數的估計 (Estimation of Parameters)

§14—1 導論

上一章我們提示過取自隨機變數X的樣本時常可用以估計與X的機率分配有關的未知參數，本章將仔細來探討這個問題。

為了讓心裡有個腹案起見，我們考慮下面一種情況。有一廠商供應我們100,000根鉚釘，好的釘子必須與洞吻合，因此有問題的鉚釘在釘入後即可由經驗上覺察出來。在接受這批貨之前，關於壞釘子所佔比率p的大小我們想要有個概念。我們隨意抽取n根加以檢查，因為100,000根相當的大，所以我們可以假設釘子抽出再放回（雖然實際上並沒有放回），我們定義下述隨機變數：若第i根是好的，則$X_i=1$否則$X_i=0$，因此我們可視X_1，$X_2\cdots\cdots X_n$為取自隨機變數X的隨機樣本，而X的分配為$p(X=1)=p$，$p(X=0)=1-p$。

很顯然地，X的機率分配決定於未知參數p，但我們能利用樣本$X_1\cdots\cdots X_n$以估計p值嗎？是否有某一統計量H，使得$H(X_1\cdots\cdots X_n)$可當p的估計值？

樣本大小n，當$n<100,000$，很明顯地，不管我們多聰明的運用從樣本獲取的資料，我們亦無法知道這些貨物的組成如何，除非我們每個加以檢查，否則我們將無法知道p的真正值（當然這裡抽樣是不再放回的）。

因此，當我們提出$\hat{p}$做為p的估計值時，我們並不希望$\hat{p}$等於p（因p是隨機變數，所以可假定為好多值），這個討論就引發了兩個重要問題：

(1)什麼情況下我們能獲一"好"的估計值？

(2)如何去分辨某一估計值較他者為佳呢？

因為讀者可能首次碰到此種問題，因此值得對此問題全盤地做個概述，許多數學問題，均有明確的答案。但此答案可能很難找到，所以只要有個近似值我們就該感到很滿意了。然而我們何時有答案何時沒有答案亦很明顯，（譬如，我們要求$3x^5-4x^2+13x-7=0$的實根，一但我們找出一個解只要將之代方程式即知此是否為正確答案，而我們如有兩個近似解r_1與r_2，也很容易決定那一個較佳。

然而，目前的問題是要估計p值，並不是很輕易可解決的。首先，因為我們無法知道p的真正值，要說我們的估計值$\hat{p}$是"正確的"是沒有什麼意義的。第二，如我們有兩個估計值$\widehat{p_1}$與$\widehat{p_2}$，我們必須找出某些方法去分辨那一個估計值"較佳"這也就是為什麼我們必須訂一些準則用以決定一較好的估計值。

§14—2 估計的準則 (Criteria for Estimates)

我們現在將定義一些重要的概念用以解決上述的問題。

【定義】　令X爲隨機變數，其機率分配決定於未知參數θ_0令$X_1 \cdots\cdots X_n$爲取自X的樣本，且令其對應值爲$x_1 \cdots\cdots x_n$，若$g(X_1 \cdots\cdots X_n)$爲一用以估計θ的樣本函數，我們稱g爲θ之一個估計量（estimator），g的函數值，即$g(x_1 \cdots\cdots x_n)$稱爲θ的估計值（estimate），通常寫爲$\theta = g(x_1 \cdots\cdots x_n)$。

【註明】　本章我們將違反一個至今仍小心遵守的規則，那就是要仔細區分隨機變數及其值，亦即當我們讀到θ的估計值$\hat{\theta}$時，事實上我們談到的是θ的估計量$g(X_1 \cdots\cdots X_n)$。因此我們對$E[g(X_1 \cdots\cdots X_n)]$將寫爲$E(\theta)$。

【定義】　令θ爲與隨機變數X分配有關之未知參數的估計值，若對每個θ均有$E(\hat{\theta}) = \theta$，則稱$\hat{\theta}$爲θ的不偏估計量（unbiased estimator）〔或稱爲不偏估計值（unbiased estimate），見前面註〕。

【註明】　任何良好的估計值應„接近"其所估計的值，„不偏"的意義爲估計值的平均數將趨近於眞正的參數值。譬如，若重複使用同樣的估計值，然後將這些值平均，我們將寄望這平均數接近眞正的參數值。雖然我們希望得不偏估計值，但有時我們却寧願有偏差的估計值（見下面）。對一未知參數，我們可能找出一個以上的不偏估計值，在此情況下爲了做一合理的選擇，我們介紹下述觀念。

【定義】　令$\widehat{\theta}$爲θ的不偏估計值，若對所有滿足$E(\theta^*) = \theta$之估計值θ^*均有$V(\widehat{\theta}) \leq V(\theta^*)$我們稱$\widehat{\theta}$爲$\theta$之最小變異不偏估計值（unbiased minimum Variance）。

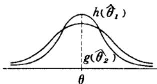


圖 14 − 1

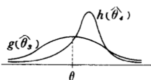


圖 14 − 2

【註明】　(a)隨機變數的變異數爲測量此隨機變數對期望值變動的大小，因此最小變異不偏估計值在直覺上是較受歡迎的，因爲若變異數小，則隨機變數之值有接近於期望值的趨勢，而對不偏估計值而言，表示此估計值接近參數值。若$\widehat{\theta_1}$與$\widehat{\theta_2}$爲θ的兩個估計值，其pdf如圖14 − 1所示，大致上我們較喜歡$\widehat{\theta_1}$，雖然兩者均爲不偏估計值，但$V(\widehat{\theta_1}) < V(\widehat{\theta_2})$。

在估計值$\widehat{\theta_3}$與$\widehat{\theta_4}$的情況，其區別則沒有那麼明顯（如圖14 − 2），因$\widehat{\theta_3}$是不偏估計值而$\widehat{\theta_4}$則否，但$V(\widehat{\theta_3}) > V(\widehat{\theta_4})$，這告訴我們平均上$\widehat{\theta_3}$較接近$\theta$，但大的變異數告訴我們$\widehat{\theta_3}$却相

當偏離 θ，而 $\widehat{\theta_4}$ 則恰恰相反，由平均上知 $\widehat{\theta_4}$ 有點大於 θ，但小的變異數却告訴我們 $\widehat{\theta_4}$ 較沒偏離 θ，亦即比 $\widehat{\theta_3}$ 接近 θ（見圖 14－2）

(b)目前存在有一些技巧可用以求最小變異不偏估計值，但無法在此加以討論，我們利用這觀念主要是在選擇一個不偏估計值，亦即若 $\widehat{\theta_1}$，$\widehat{\theta_2}$ 均是 θ 的不偏估計值，且若 $V(\widehat{\theta_1}) < V(\widehat{\theta_2})$，則我們選擇 $\widehat{\theta_1}$。

另外一種判斷估計值的準則比較難以敍述，由下述定義可得基本論斷。

【定義】 令 $\widehat{\theta}$ 爲參數 θ 的估計值（依據樣本 $X_1, \cdots\cdots X_n$）對所有 $\varepsilon > 0$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} prob\left[\,|\widehat{\theta}-\theta| > \varepsilon\,\right] = 0$

則我們稱 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的一個一致估計值（consistent estimate）亦即對所有 $\varepsilon > 0$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} prob\left[\,|\widehat{\theta}-\theta| \le \varepsilon\,\right] = 1$

【註明】 (a)此定義說明當 n 增大時，若 $\widehat{\theta}$ 收斂於 θ，則稱 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的一致估計值，一個估計值若擁有這特性，本能上將讓人感到滿足。因爲它說明當 n 增大時即表示估計值將變得較好。

(b)要檢定一個估計值是否有不偏性相當簡單，比較兩個不偏估計值的變異數也是很直接了當，但要應用上面定義來證明一致性就沒那麼簡單。下面的定理有時很有用。

【定理 14－1】 依據一大小爲 n 的樣本，令 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的估計值，若 $\lim\limits_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} V(\widehat{\theta}) = 0$，則 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的一個一致估計值。

【證明】 利用（7－20）式 chebyshev's inequality 我們得

$$
\begin{aligned}
p\left[\,|\widehat{\theta}-\theta| \ge \varepsilon\,\right] &\le \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\widehat{\theta}-\theta\right]^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\widehat{\theta}-E(\widehat{\theta})+E(\widehat{\theta})-\theta\right]^2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E\left\{\left[\widehat{\theta}-E(\widehat{\theta})\right]^2 + 2\left[\widehat{\theta}-E(\widehat{\theta})\right]\left[E(\widehat{\theta}-\theta\right] + \left[E(\widehat{\theta}-\theta\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{Var\ \widehat{\theta} + 0 + \left[E(\widehat{\theta})-\theta\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

因此令 $n\to\infty$ 且利用定理假設，我們發現 $\lim_{n\to\infty} p\,[\,|\,\widehat{\theta}-\theta\,|\geq\varepsilon\,]\leq 0$，因此等於 0。

【註明】 若估計值 $\widehat{\theta}$ 具有不偏性，則第一個條件即自動滿足。

最後一個常應用於估計值的準則可敘述如下，假設 $X_1\cdots\cdots X_n$ 爲 X 的一個樣本，而 θ 爲其未知參數，令 θ 爲（$X_1\cdots\cdots X_n$）的函數。

【定義】 若

(a) $E(\widehat{\theta})=\theta$

(b) $\widehat{\theta}=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，亦即 θ 爲這樣本的線性函數。

(c) $V(\widehat{\theta})\leq V(\theta^*)$ 其中 θ^* 爲任何滿足上式(a)(b)的 θ 估計值。

則我們稱 $\widehat{\theta}$ 爲 θ 的最佳線性不偏估計值（best linear unbiased estimate）。

接著我們將考慮一種相當普遍的方法，利用這方法可使許多問題得到良好估計值，它們且將滿足一個或更多上面提過的準則。在未考慮這個方法之前，我們僅簡單地考慮一些估計值，直覺上它們是很合理的。然後利用上面的準則檢驗這些估計值是好或壞。

§14—3 例題

上式有關不偏性，最小變異數，一致性，與線性的準則給我們一條因循的方向用以判斷估計值，現在讓我們來考慮一些例題。

【例題14－1】 讓我重新考慮上面的問題，我們抽取 n 根鉚釘而發現樣本（$X_1\cdots\cdots X_n$）中有 k 根是不良品，亦即 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i=k$，由於我們的假設，所以 Y 爲二項分配的隨機變數。

p 最有意義的估計值 $\widehat{p}$ 應是 $\widehat{p}=Y/n$，利用上述的一些準則我們來看看此估計值是如何好法。

$$E(\widehat{p})=E(Y/n)=\frac{1}{n}(np)=p$$

因此 p 爲 p 的不偏估計值。

$$V(\widehat{p})=V\left(\frac{Y}{n}\right)=\frac{1}{n^2}np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$$

當 $n\to\infty$ 則 $V(\widehat{p})\to 0$，因此 $\widehat{p}$ 是 p 的一致性估計值。如同我們前面所述，一個參數可能有許多不偏估計值，但有些估計值實際上可能很差。譬如，在本例第一個選出爲不良品則定義 p^* 爲 $p^*=1$，若選出是良品 $P^*=0$ 很顯然這並非很好的估計值，因爲它只是 X_1 函數的值而非 $X_1\cdots\cdots X_n$。然而 p^* 是不偏的，因 $E(p^*)=1$，$p(X=1)+0\,p(X=0)=p$。但變異數第於 $p(1-p)$ 與 $\frac{p(1-p)}{n}$ 比起來顯然相差很多，尤其是當 n 很大時。

上例所獲的結果為下面定理的一個特殊情況。

【定理 14－2】 令 X 為隨機變數，其有限期望值為 μ 變異數 σ^2 令 $\overline{X}$ 是大小為 n 的樣本平均數，則 $\overline{X}$ 為 μ 的不偏一致估計值。

【證明】 由定理 13－1 知 $E(\overline{X})=\mu$ 且 $V(\overline{X})=\sigma^2/n$ 當 $n\to\infty$ 則接近。而本定理立即得證。

【註明】 例 14－1 所顯示的結果為定理 14－2 的一個特殊情況，這是因為 r/n，可寫為 $(1/n)(X_1+\cdots\cdots+X_n)$ 此 X_i 之值是。或須視被檢查物品為良品與否而定。

定理 14－2 所提到的樣本平均數為樣本的線性函數，亦即它為 $a_1X_1+a_2X_2+\cdots\cdots+a_nX_n$，其 $a_1=\cdots\cdots=a_n=1/n$，顯然若 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，則 $\widehat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 是 μ 的不偏估計值，下面問題很有意思：即 a_i 的值為何（對 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$）才能使 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 的變異數最小？對所有 i 而言若 $a_i=1/n$ 則可證明出其變異數為最小，亦即 $\overline{X}$ 為最小變異不偏的線性估計值。

要瞭解這個，我們考慮

$$\widehat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i \qquad \sum_{i=1}^{n}a_i=1$$

所以 $\quad Var\ \widehat{\mu}=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

因為 X_i 為擁有共同變異數 σ^2 的獨立隨機變數，所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i^2&=(a_1-1/n)^2+\cdots\cdots(a_n-1/n)^2+(2/n)(a_1+\cdots\cdots+a_n)-n(1/n^2)\\&=(a_1-1/n)^2+\cdots\cdots+(a_n-1/n)^2+1/n \qquad (\text{因}\sum_{i=1}^{n}a_i=1)\end{aligned}$$

由上式明顯可知對所有 i 而言若 $a_i=1/n$ 則變異數將最小。

【例題 14－2】 假設組件的失效時間 T 為指數分配，亦即 T 的 pdf 為 $f(t)=\beta e^{-\beta t}$，$t\geq 0$ 假定試驗 n 個這種組件，記下其每個的失效時間，$T_1\cdots\cdots T_n$。根據樣本 $(T_1\cdots\cdots T_n)$，我們想得期望失效時間（expected time to failure）$E(T)=1/\beta$ 的一個不偏估計值，一個這樣的估計值為 $\overline{T}=(1/n)\sum_{i=1}^{n}T_i$ 由定理 14－2 知 $E(\overline{T})=1/\beta$。因為 $V(T)=1/\beta^2$，定理 13－1 告訴我們 $V(\overline{T})=1/\beta^2n$。然而 $\overline{T}$ 並非 $1/\beta$ 唯一的不偏估計值，事實上考慮樣本的極小值 $Z=min(T_1\cdots\cdots T_n)$，由定理 13－3 知 Z

為參數 $n\beta$ 的指數分配，因此 $E(Z)=1/n\beta$，所以 nZ 亦為 $1/\beta$ 的一個不偏估計值。變異數為

$$V(nZ)=n^2V(Z)=n^2\frac{1}{(n\beta)^2}=\frac{1}{\beta^2}$$

雖然 nZ 與 $\overline{T}$ 均為不偏估計值，但因 $\overline{T}$ 的變異數較小所以選數它。

然而，在這特殊狀況裡，其他方面的考慮可能會影響對兩者的選擇。我們同時試驗 n 個組件，當我們以 nZ 為估計值時若有一組件失效則可停止試驗，但以 $\overline{T}$ 為估計值時，我們必須試驗到所有組件都失效為止。換言之，若 L 是試驗 n 個組件所需的時間。而我們計算 $\frac{1}{\beta}$ 的估計值時，當使用 nZ，則有 $L=min(T_1\cdots\cdots T_n)$。當使用 $\overline{T}$，則有 $L=max(T_1\cdots\cdots T_n)$ 因此若試驗所費的代價很高，則我們寧可用較大變異數的估計值。

【例題 14－3】　假設根據一樣本 $X_1\cdots\cdots X_n$，我們想求得一隨機變數其 σ^2 的一個不偏估計值。

雖然，直覺上我們可能就考慮 $\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，且本統計量的期望值等於 $[(n-1)/n]\sigma^2$（見定理 13－4）因此 σ^2 之一不偏估計值為

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

【註明】　(a)雖當 n 較小時除以 $(n-1)$ 與除以 n 有差別，但當 n 很大時，使用那一個就沒什麼差別了。

(b)例 14－3 敘述一個共同的情況：很可能參數 β 的估計值 $\widehat{\beta}$ 有偏差，$E(\widehat{\beta})=k\beta$；但我們考慮新的估計值 $\widehat{\beta}/k$，這樣子就得到不偏估計值了。

(c)上述 n^2 的估計值具有一致性，但我們不打算在此證明。

表 14－1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
n_k	57	203	383	525	532	408	273	139	49	27	10		2612

【例題 14－4】　表 14－1 錄自著名的Rutherford 試驗，其中 k 是單位時間（$\frac{1}{8}$分）內放射出的 α 粒子數 n_k 則為有 k 個粒子的區間個數，若令 X 為 $\frac{1}{8}$ 分鐘內放射的粒子數且 X 遵從 poission 分配，我們有

$$p(X=k)=\frac{e^{-(1/8)\lambda}\left(\frac{1}{8}\lambda\right)^k}{k!}$$

因為 $E(X)=\frac{1}{8}\lambda$，我們可應用樣本平均數獲得 $E(X)$ 之一個不偏估計值

。對 λ，我們有 $\widehat{\lambda}=8\overline{X}$，為了求 $\overline{X}$，我們計算。

$$\frac{\sum_{k=0}^{11} k\, n_k}{\sum_{k=0}^{11} n_k}=3.87$$

因此 λ 的一個不偏估計值等於 30.96（此亦可說為每分鐘期望放射出來的粒子數。

【例題 **14－5**】

在製造炸藥時，可能會發生幾次著火，假定 X 是以 λ 為參數的 poission 分配，表 14－2 給了一些數據用以估計入。

表 14－2

Number of ignitions, k	0	1	2	3	4	5	6	Total
Number of days with k ignitions, n_k	75	90	54	22	6	2	1	250

我們仍以樣本平均數來估計 λ 值，我們得

$$\widehat{\lambda}=\frac{\sum_k k\, n_k}{\sum_k n_k}=1.22\text{次（每天）}$$

【例題 **14－6**】 已知煤中灰的含量是參數 μ 與 σ^2 的常態分配，表 14－3 的數據表 250 件分析過灰含量的樣本，n_x 表是灰含量 x% 的樣本個數。

為了估計 μ 與 σ^2，我們利用前面討論過的不偏估計值得

$$\widehat{\mu}=\frac{\sum_x x\, n_x}{250}=16.998$$

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{249}\sum_x n_x\,(x-\widehat{\mu})^2=7.1$$

表 14－3

Ash content in coal										
x	9.25	9.75	10.25	10.75	11.25	11.75	12.25	12.75	13.25	13.75
n_x	1	0	2	1	1	2	5	4	7	6
x	14.25	14.75	15.25	15.75	16.25	16.75	17.25	17.75	18.25	18.75
n_x	13	14	15	13	24	15	19	23	22	12
x	19.25	19.75	20.25	20.75	21.25	21.75	22.25	22.75	23.25	23.75
n_x	12	7	6	8	6	4	2	2	0	3

x	24.25	24.75	25.25							
n_x	0	0	1							
Total samples	250									

【註明】　假設我們有一個參數 θ 之不偏估計值 $\widehat{\theta}$。或許恰好我們正興趣於估計某些 θ 的函數，以 $g(\theta)$ 表之，〔譬如，若 X 爲參數 θ 的指數分配，我們將可能對 $1/\theta$ 感興趣，卽 $E(X)$〕，可能我們會假定 $1/\theta$ 或 $(\theta)^2$ 的不偏估計值爲 $1/\widehat{\theta}$ 或 $(\widehat{\theta})^2$，但顯然並不見得如此，事實上，不偏估計準則有一不利的地方是若我們找到一個 θ 的不偏估計值，而要找一 $g(\theta)$ 的估計值我們通常還得從頭開始。只當若 $g(\theta)=a\theta+b$ 才有 $E[g(\widehat{\theta})]=g[E(\widehat{\theta})]$ 通常 $E[g(\widehat{\theta})]\neq g[E(\widehat{\theta})]$ 例如假使 X 爲隨機變數，且 $E(X)=\mu$，$V(X)=\sigma^2$ 而我們已知樣本平均數 $\overline{X}$ 是 μ 的一個不偏估計值，但 $\overline{X}^2$ 是否仍爲 $(\mu)^2$ 的估計值呢？答案是"否"，由下面的說明我們卽可得到說明，因爲

$$V(\overline{X})=E(\overline{X})^2-[E(\overline{X})]^2$$，我們有

$$E(\overline{X})^2=V(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\sigma^2/n+(\mu)^2\neq(\mu)^2$$

雖然上例顯示通常 $E[g(\widehat{\theta})]\neq g[E(\widehat{\theta})]$

但是有很多情況等號是成立的，至少約略相等尤其是當樣本很大時，譬如說，上例我們發現此 $\widehat{\theta}=\overline{X}$ 且 $g(Z)=Z^2$〕$E(\overline{X})=\mu$，$E(\overline{X})^2=\mu^2+\sigma^2/n$ 當其 n 很大時，$E(\overline{X})^2$ 則幾乎等於 μ^2 了。

§14—4　最概估計值　(Maximum Likehood Estimates)

我們僅考慮過幾個用以判斷一個估計值的準則，亦卽，給一個未知參數的估計值，我們可以檢定它是否具有不偏性與一致性，我們亦可以計算其變異數與其他估計值的變異數比較，然而，到目前尙無一個普遍的方法用以找出"合理"的估計值。雖然有幾種方法存在，在此我們將探討其中一種，它稱爲"最概估計值"有很多情況下這種方法可導出很合理的估計值。

爲了避免在離散與連續上重複的討論，在此我承認這些術語的使用。

$f(x;\theta)$ 表 X 的 pdf（計算 x 點）或若 X 爲離散時則爲 $p(X=x)$。我們之所以包含 θ 符號主要是在提醒 X 的機率分配決定於我們所關心的參數 θ。

令 $X_1\cdots\cdots X_n$ 爲 X 的隨機樣本，其樣本值爲 $x_1\cdots\cdots x_n$ 我們定義概似函數（Likehood function）L 爲樣本與 θ 的函數。

$$L(X_1\cdots\cdots X_n;\theta)=f(X_1;\theta)f(X_2;\theta)\cdots\cdots f(X_n;\theta)$$

若 X 爲離散的隨機變數，則 $L(X_1\cdots\cdots X_n;\theta)$ 表 $p[X_1=x_1,\cdots\cdots X_n=x_n]$，而若 X 是連續的則 $L(X_1\cdots\cdots X_n;\theta)$ 表示 $(X_1\cdots\cdots X_n)$ 的 joint pdf.

若樣本 $(X_1\cdots\cdots X_n)$ 已取得，則樣本值 $(x_1\cdots\cdots x_n)$ 我們就知道了。因爲 θ 爲未知，所以我們先自問下面這幾個問題。當 θ 多大時，$L(X_1\cdots\cdots X_n$

；θ）會最大？換言之，我們如考慮θ的兩個可能值θ_1和θ_2，若$L(X_1, \cdots X_n; \theta_1) < L(X_1, \cdots\cdots X_n; \theta_2)$對已知樣本值（$x_1 \cdots\cdots x_n$）而言我們將選擇$\theta_2$，因爲若$\theta_2$是$\theta$的眞正值，則獲得樣本值的機率將比$\theta_1$爲$\theta$的眞正值時的機率來得大。講開一點也就是我們選擇那些能使事件發生的可能性最大的參數值，亦即在數據未取得前對θ而言假定每個值都相等，但在取得數據後我們則希望選擇對θ最大可能值。正式定義於下。

【定義】 依據隨機樣本$X_1 \cdots\cdots X_n$，θ的最概估計值θ爲使$L(X_1, \cdots\cdots X_n; \theta)$最大之$\theta$值。其中$L$如定義（14－1）（我們通常稱最概估計值爲$ML$估計值）。

【詳明】 (a)θ當然是一個統計量，所以是一隨機變數，因此其值將決定於樣本（$X_1 \cdots\cdots X_n$）（我們並不將一常數看做一個解答）。

(b)大多數例子的θ都代表一個實數，然而X的機率分配可能決定於兩個或兩個以上的參數值（譬如常態分配），在這種情況θ可以向量來表示，如$\theta = (\alpha, \beta)$或$\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$等等。

(c)爲了求出ML估計值，我們必須決定一函數的極大值。在許多問題上我們可用微積分的技巧來求出此極大值。因爲$\log x$是x的遞增函數，要使$\log L(X_1, \cdots\cdots X_n; \theta)$最大的$\theta$值也將使$L(X_1 \cdots\cdots X_n; \theta)$最大因此若$\theta$爲實數且$L(X_1 \cdots\cdots X_n; \theta)$爲$\theta$的一個可微分函數，我們就可由解概似方程式（likehood equation）求出ML估計值。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(X_1, \cdots\cdots X_n; \theta) = 0 \tag{14-2}$$

若$\theta = (\alpha, \beta)$則上式可換爲

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log L(X_1, \cdots\cdots X_n; \alpha . \beta) = 0 \tag{14-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log L(X_1, \cdots\cdots X_n; \alpha, \beta) = 0$$

應再強調的是上述方法並不一定有效，然而，對大多數重要例子（有些這種例子很少會考慮到）而言，這種方法比較容易獲得所要的ML估計值。

最概估計值的性質（proporties of maximum likehood estimates）：

(a)最概估計值可能有偏差，但乘上一適當的常後往往可消除此偏差。

(b)在一般條件下，ML估計值是具有一致性的，亦即若這些估計值所依據的樣本大小很大的話，ML估計值會接近其所欲估計的參數值（ML估計值另外具有與〝大的樣本大小〞有關的重要性質，隨後我們再加以討論）。

(c)ML估計值具有下述很重要的〝不變異性〞。（invariance property）。假定$\widehat{\theta}$爲θ的ML估計值，則可證明$g(\widehat{\theta})$爲$g(\theta)$的ML估計值。

亦即，若統計學家A的測量單位爲(呎)^{2}而B的單位爲呎，且若A的ML估計值爲$\hat{\theta}$，則B的ML估計值應爲$\sqrt{\hat{\theta}}$，這種性質是不偏估計值所沒有的。

我們將考慮幾個重要例子用以說明ML估計值。

【例題 14－7】　假設有一組件的失效時間T爲指數分配，其參數爲β，因此下的pdf爲

$$f(t)=\beta e^{-\beta t}\quad,\quad t\geq 0$$

假設試驗n件此種組件得T_1，……T_n，則此樣本的概似函數(lilsehood function)爲

$$L(T_1,\cdots\cdots T_n;\beta)=\beta^n\ exp(-\beta\sum_{i=1}^{n}T_i)$$

於是 $log\ L=n\ log\ \beta-\beta\sum_{i=1}^{n}T_i$，所以

$$\frac{\partial\ log\ L}{\partial\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}T_i\qquad 且\qquad\frac{\partial\ ln\ L}{\partial\beta}=0$$

得$\hat{\beta}=1/\overline{T}$　，　此$\overline{T}=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}T_i)$

因爲T的期望值等於$1/\beta$，應用ML估計值的不變異性，我們可知$E(T)$的ML估計值是樣本平均數$\overline{T}$。而我們已知$E(\overline{T})=1/\beta$・因此$E(T)$的ML估計值$\overline{T}$具有不偏性。

【註明】　通常要找ML估計值的機率分配並不是很簡單的事，特別是樣本大小很小時(若n很大，我們可以找出一個很有用的通解)然而，本例我們可以獲得ML估計值的分配。由定理 10－9 的推論，我們發現$2n\beta\overline{T}$有χ^2_{2n}的分配，因此$p(\overline{T}\leq t)=p(2n\beta\overline{T}\leq 2n\beta t)$，如果已知$n$，$\beta$，$t$值則可由chi-square 分配表直接查出其值。

【例題 14－8】　已知炮彈爲不良品的比率是p，若由一大堆炮彈中隨機選取n枚加以試驗，定義如下的隨機變數。

$$X_i=1\qquad 若第\ i\ 枚炮是不良品，i=1,2,\cdots\cdots n$$
$$=0\qquad 否則。$$

因此取自隨機變數X的樣本(X_1，……X_n)的機率分配爲$p(X=0)=f(0;p)=1-p$，$p(X=1)=f(1;p)=p$

亦即$f(x,p)=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$　所以

$$L(X_1,\cdots\cdots X_n;p)=p^k(1-p)^{n-k}$$

其中$k=\sum_{i=1}^{n}X_i$=不良品的總數

因此　$\ln L(X_1 \cdots\cdots X_n \; ; \; p) = k \ln p + (n-k) \ln(1-p)$

於是　$\dfrac{\partial \ln L}{\partial p} = \dfrac{k}{p} + \dfrac{n-k}{1-p}(-1) = \dfrac{k}{p} - \dfrac{n-k}{1-p}$

若 $k=0$ 或 n，則由 L 式可直接求得當 $p=0$ 或 1 時，L 有極大值。若 $k \neq 0$ 或 n，我們令 $\dfrac{\partial \log L}{\partial p} = 0$，得 $p = k / n = Z$ 樣本平均數為其解。由此發現我們找出的參數，它的 ML 估計值將產生一不偏估計值。

【例題 14－9】　假設隨機變數 X 為常態分配，其期望值 μ 且變異數為 1，亦即 X 的 pdf 為

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x-\mu)^2}$$

若 $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 為取自 X 的隨機樣本，則這樣本的概似函數為

$$L(X_1 \cdots\cdots X_n \; ; \; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]$$

因此

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

且

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)$$

由 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$　得到樣本平均 $\widehat{\mu} = \overline{X}$。

【例題 14－10】　到目前為止我們所考慮的情況皆是我們可用微分方法可求得 L 的最大值，下面的例子則告訴我們這種方法不見得有效。

假設隨機變數 X 為在〔0，α〕上的均勻分配，此 α 為未知參數，X 的 pdf 為

$$f(x) = 1/\alpha \qquad 0 \le x \le \alpha$$
$$= 0 \qquad \text{其他}$$

若 $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 為取自 X 的樣本，其概似函數為

$$L(X_1, \cdots\cdots X_n \; ; \; \alpha) = (1/\alpha)^n \qquad 0 \le X_i \le \alpha \text{ 對所有 } i \text{ 值}$$
$$= 0 \qquad \text{其他}$$

對已知的 $(X_1 \cdots\cdots X_n)$ 考慮 L 為 α 的函數，為了不使 L 值為 0，對所有 i 值我們均必須使 $\alpha \ge X_i$，這相當於要求 $\alpha \ge max(X_1 \cdots\cdots X_n)$，由此我們若將 L 的圖形劃出則如圖 14－3 所示。

由此圖顯然即可求知能使 L 值為最大的 α 值，即 $\widehat{\alpha} = max(X_1 \cdots\cdots X_n)$。

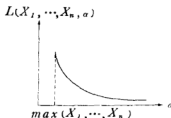


圖 14－3

我們來研究一下這估計值的一些性質。由定理13－2我們獲得α的pdf：$g(\widehat{\alpha})=n[F(\widehat{\alpha})]^{n-1}f(\widehat{\alpha})$，但$F(x)=x/\alpha$，$0\leq x\leq\alpha$且$f(x)$由上面已知。因此我們得

$$g(\widehat{\alpha})=n\left[\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right]^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n(\widehat{\alpha})^{n-1}}{\alpha^n}\qquad 0\leq\widehat{\alpha}\leq\alpha$$

為求$E(\widehat{\alpha})$我們計算

$$E(\widehat{\alpha})=\int_0^\alpha\widehat{\alpha}g(\widehat{\alpha})\,d\widehat{\alpha}=\int_0^\alpha\widehat{\alpha}\frac{n\widehat{\alpha}^{n-1}}{\alpha^n}d\widehat{\alpha}$$

$$=\frac{n}{\alpha^n}\frac{\widehat{\alpha}^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\alpha=\frac{n}{n+1}\alpha$$

此$\widehat{\alpha}$並非α的不偏估計值，$\widehat{\alpha}$傾向於〝低估〞α，若我們想得不偏估計值，可使

$$\widehat{\widehat{\alpha}}=\frac{n+1}{n}max(X_1\cdots\cdots X_n)$$

注意雖然$E(\widehat{\alpha})\neq\alpha$，但確實$\lim_{n\to\infty}E(\widehat{\alpha})=\alpha$。由於要證明一致性，我們仍必須證明當$n\to\infty$時$V(\widehat{\alpha})\to0$（見定理14－1）我們必須計算$E(\widehat{\alpha})^2$：

$$E(\widehat{\alpha})^2=\int_0^\alpha(\widehat{\alpha})^2g(\widehat{\alpha})\,d\widehat{\alpha}=\int_0^\alpha(\widehat{\alpha})^2\frac{n(\widehat{\alpha})^{n-1}}{\alpha^n}d\widehat{\alpha}$$

$$=\frac{n}{\alpha^n}\frac{(\widehat{\alpha})^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\alpha=\frac{n}{n+2}\alpha^2$$

因此

$$V(\widehat{\alpha})=E(\widehat{\alpha})^2-(E(\widehat{\alpha}))^2=\frac{n}{n+2}\alpha^2-\left[\frac{n}{n+1}\alpha\right]^2$$

$$=\alpha^2\left[\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right]$$

由此得當$n\to\infty$則$V(\widehat{\alpha})\to0$所以一致性成立。

【例題14－11】 我們考慮一個例子，其需要兩未知參數用以描述其分配，假設X有$N(\mu,\sigma^2)$的分配，所以X的pdf為

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)$$

若$(X_1\cdots\cdots X_n)$為X的一個樣本，其概似函數為

$$L(X_1\cdots\cdots X_n;\mu,\sigma)=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right]^2\right\}$$

因此

$$ln\,L=\left(-\frac{n}{2}\right)ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

我們必須同時解

$$\frac{\partial L}{\partial \mu}=0 \qquad 與 \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=0$$

得

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2}=0$$

解得樣本平均數 $\widehat{\mu}=\overline{X}$，且

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^3}=0$$

得 $\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

注意 ML 方法將可求出 σ^2 的不偏估計值，因爲我們已知 σ^2 的不偏估計值爲 $\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

【例題 14－12】 在例 14－7 我們自經考慮過一個指數分配律參數 β 的估計值方面的問題，就是試驗 n 件物品，並且記錄其失效時間 $T_1 \cdots\cdots T_n$。下面則是另一種方法，假設我們取 n 件物品，然後試驗它們，經過 T_o（小時）後，我們數一下失效的件數 X，則我們的樣本爲 $X_1 \cdots\cdots X_n$ 所組成，其中若第 i 件物品在某一特定時間內已經失效則 $X_i=1$，否則 $X_i=0$，因此這樣本的概似函數爲

$$L(X_1\cdots\cdots X_n;\beta)=p^k(1-p)^{n-k}$$

其中 $k=\sum_{i=1}^{n}X_i$＝物品失效的個數，P＝物品失效的機率，現在 p 是欲估參數值 β 的函數，亦即

$$p=p(T\leq T_o)=1-e^{-\beta T_o}$$

利用例 14－8 的結果，我們得 p 的 ML 估計值爲 $p=k/n$，應用 ML 估計值的„不變異性”（注意 p 爲 β 的遞減函數）藉解方程式 $1-e^{-\beta T_o}=k/n$ 可獲得 β 的 ML 估計值。簡易的計算後得

$$\widehat{\beta}=-\frac{1}{T_o}\ln\left(\frac{n-k}{n}\right)$$

或失效時間的平均數爲 $1/\beta$ 的估計值

$$\widehat{\left(\frac{1}{\beta}\right)}=\frac{-T_o}{\ln[(n-k)/n]}$$

以上我們考慮過的例子，利用 ML 方法都可得到易解的方程式。但在很多問題並沒這種情況則我們往往必須應用數值方法去獲得估計值，下面例子可說明這些困難。

【例題 14－13】 我們已經提過，Gamma 分配應用於壽命的試驗（life

test ）非常重要。譬如我們假設發電機到失效時的壽命長X，其pdf為

$$f(x)=\frac{\lambda^{r}x^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-\lambda x}\quad,\quad x\geq 0$$

其中r與λ為我們欲加以估計的正參數。假定有取自X的樣本（$X_1\cdots\cdots X_n$）可加以利用，樣本的概似函數為

$$L(X_1\cdots\cdots X_n\;;\;\lambda\;,\;\gamma)=\frac{(\lambda)^{nr}(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{r-1}exp(-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i)}{[\Gamma(r)]^n}$$

$$ln\,L=nr\,ln\,\lambda+(r-1)\sum_{i=1}^{n}lnX_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n\,ln\,\Gamma(r)$$

由此我們同時解$\dfrac{\partial\,lnL}{\partial\lambda}=0$與$\dfrac{\partial\,ln\,L}{\partial r}=0$

這兩方程變為

$$\frac{\partial\,lnL}{\partial\lambda}=\frac{nr}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}X_i=0$$

$$\frac{\partial\,lnL}{\partial r}=n\,ln\,\lambda+\sum_{i=1}^{n}ln\,X_i-n\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}=0$$

由$\dfrac{\partial\,ln\,L}{\partial\lambda}=0$直接得$\widehat{\lambda}=\dfrac{Y}{\overline{X}}$，因此以$\widehat{\lambda}$代換$\lambda$我們發現由$\dfrac{\partial\,ln\,L}{\partial r}=0$得

$$ln\,r-\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}=ln\,\overline{X}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}lnX_i$$

顯然我們必須解上面方程式得r，然後得$\widehat{\lambda}=\dfrac{\widehat{r}}{\overline{X}}$很幸運的函數$\dfrac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}$已經被製成圖表。一種很快即可獲得需要解的方法已在$D\,G\,Chapman$的論文上有所討論。（Annals of Mathematical Statistics 27,498－506,1956）本例說明概似方程式（likehood equations）的解可能導致數學上的困難。

如我們前面所示，ML估計值具有其他性質，而這些性質使ML估計值變成特別需要尤其是若這些估計值是根據相當大的樣本時。

最概估計值的漸近性（Asymptotic property of maximum likehood estimates）依據取自隨機變數X的隨機樣本（$X_1\cdots\cdots X_n$），若$\widehat{\theta}$為參數θ的ML估計值，且n有足夠大則隨機變數$\widehat{\theta}$有近似於

$$N(\theta\,,\frac{1}{B})\quad,\qquad 其中B=n\,E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}ln\,f(X\,;\,\theta)\right]^2 \tag{14－4}$$

的分配。此f由X因離散或連續性而為點機率分配或X的pdf，且此θ假定為實數。

【註明】　(a)上述的性質比我們以前所提的一致性較為有力，因為一致性只是說若n夠大則$\widehat{\theta}$將趨近於θ，但是下述則確實的告訴我們對於大n的

機率行爲（probabilistic behavior）。

(b)我們不準備證明上述論斷，而只一例說明其用處而已。

【例題 14－14】 重新考慮例 14－7，我們發現 $\widehat{\beta}=1/\overline{T}$ 爲 β 的 ML 估計值，T 的 pdf 爲 $f(t;\beta)=\beta e^{-\beta t}$，$t>0$ 上面性質告訴我們當 n 夠大則 $\widehat{\beta}=1/\overline{T}$ 有近似於 $N(\beta, 1/B)$ 的分配，其中 B 如式（14－4）所示。

爲了求 B，考慮 $\ln f(T;\beta)=\ln\beta-\beta T$，則

$$(\partial/\partial\beta)\ln f(T;\beta)=(1/\beta)-T$$

因此

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f(T;\beta)\right]^2=\frac{1}{\beta^2}-\frac{2T}{\beta}+T^2$$

因爲

$$E(T)=1/\beta \text{ 且 } E(T^2)=V(T)+[E(T)]^2$$
$$=1/\beta^2+1/\beta^2=2/\beta^2$$

我們得

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f(T;\beta)\right]^2=\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\beta}\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{\beta^2}$$

因此對大 n 我們發現 β 有近似於 $N(\beta, \beta^2/n)$ 的分配。（由於當 $n\to\infty$，$\beta^2/n\to 0$，這證明本估計值具有一致性）。

表 14－4

X(height,m)	Y(temperature, °C)	X(height,m)	Y(temperature, °C)
1142	13	1008	13
1742	7	208	18
280	14	439	14
437	16	1471	14
678	13	482	18
1002	11	673	13
1543	4	407	16
1002	9	1290	7
1103	5	1609	6
475	11	910	9
1049	10	1277	11
566	15	410	14
995	10		

§14－5 最小平方法 (The Method of Least Squares)

【例題 14－15】 我們都知道氣溫隨着高度而遞減，表 14－4 的數據與圖 14

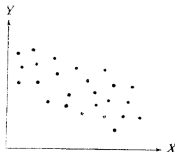


圖14－4

－4的散佈圖對此可加以印證，圖14－4不只指出氣溫Y爲高度X的遞減函數，而且有明顯的線性趨勢。

本觀測值代表瑞士許多觀測站早晨高度（m）與氣溫（°C）的關係，數據由Observatory Basel-St Margarathen 所提供。

那個合理的模型適於上面的數據呢？我們假定Y爲一隨機變數其值決定於X。特別地，我們將假設

$$Y=\alpha X+\beta+\varepsilon$$

其中α與β爲（未知）常數，X爲被測量Y的高度（已知）且ε爲一隨機變數，這線性模型的分析將決定於我們對隨機變數ε的假定。（實際上我們亦可說氣溫爲一隨機的結果，其值可分解爲一全然的隨機部份再加上高度X的線性部份）。我們對ε的假定如下：

對所有X值，$E(\varepsilon)=0$　　　$V(\varepsilon)=\sigma^2$

亦即ε的期望值與變異數不決定於X之值，因此$E(Y)=\alpha X+\beta$且$V(Y)=\sigma^2$，注意我們規定的模型決定於三個參數α，β與σ^2。除非我們對ε的分配有進一步的假定，否則我們無法用最概似法去估計這些參數值。因爲除了對期望值與變異數做了一個假定外，對隨機變數ε並未做任何假設。（隨後我們會提到這個的修正模型）。

在未討如何去估計這些適當的參數之前，我們先簡略的敘述一下隨機樣本在此前後的意義。假設我們選出X的n個值$x_1\cdots\cdots x_n$（X在此並非隨機變數），對於每個x_i，令Y_i爲上述隨機變數Y的一獨立觀測值，因此$(x_1, Y_1)\cdots\cdots(x_n, Y_n)$可視爲在已知$X$值$(x_1\cdots\cdots x_n)$情況下取自隨機變數$Y$的一個隨機樣本。

【定義】　假設有$E(Y)=\alpha X+\beta$，其中α，β與X如上所述，令$(x_1 Y_1)\cdots\cdots(x_n Y_n)$爲$Y$的一個隨機樣本，則參數$\alpha$，$\beta$的最小平方估計值爲使

$$\sum_{i=1}^{n}[Y_i-(\alpha x_i+\beta)]^2$$

值爲最小的α與β值。

【註明】　上述準則的解說相當清晰（見圖14－5），對每一序對(x_i, y_i)我們計算觀測值Y_i與期望值$\alpha x_i+\beta$間的差異，因爲我們只關心這差異的大小，因此我們就所有的樣本點將其平方再求總和，我們要找的是使其總和爲最小時的直線。

爲了要獲得α與β的估計值，我們令$\sum_{i=1}^{n}[Y_i-(\alpha x_i+\beta)]^2$爲求$S$

(α, β) 的極小值，我們必須解方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=0 \quad 與 \quad \frac{\partial S}{\partial \beta}=0$$

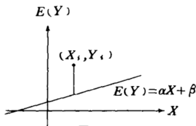


圖 14 − 5

將 S 對 α 與 β 分別微分，我們得

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n} 2\,[\,Y_i-(\alpha x_i+\beta)\,](-x_i)$$

$$=-2\sum_{i=1}^{n}[\,x_iY_i-\alpha x_i^2-\beta x_i\,]$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=\sum_{i=1}^{n} 2\,[\,Y_i-(\alpha x_i+\beta)\,](-1)=-2\sum_{i=1}^{n}[\,Y_i-\alpha x_i-\beta\,]$$

因此 $\frac{\partial S}{\partial \alpha}=0$ 與 $\frac{\partial S}{\partial \beta}=0$ 可分別寫成

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iY_i \tag{14-5}$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+n\beta=\sum_{i=1}^{n}Y_i \tag{14-6}$$

由於我們有未知參數 α 與 β 的兩個線性方程式，利用平常的直接消去法或行列式即可獲得其解，將其解記為 α 與 β，我們很容易發現

$$\widehat{\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \qquad 其中\ \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{14-7}$$

$$\widehat{\beta}=\overline{Y}-\widehat{\alpha}\overline{x} \qquad 其中\ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \tag{14-8}$$

只要 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\neq 0$，則上述解一定可獲得而且唯一。然而，不論是否所有 x_i 值均相等，上述條件仍然成立。

利用上述方法參數 σ^2 的估計值將無法獲得，通常 σ^2 的估計值，我們以 α 與 β 的最小平方估計值加以描述，即

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}[\,Y_i-(\widehat{\alpha}x_i+\widehat{\beta})\,]^2$$

【註明】 (a) $\widehat{\alpha}$ 顯然為樣本值 $Y_1\cdots\cdots Y_n$ 的一個線性函數。

(b)由下列演算顯示 $\widehat{\beta}$ 仍為 $Y_1\cdots\cdots Y_n$ 的一個線性函數。

$$\widehat{\beta}=\overline{Y}-\widehat{\alpha}\,\overline{x}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i-\frac{\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})Y_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}Y_i\left[\frac{1}{n}-\bar{x}\frac{(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]$$

(c)將證明$E(\widehat{\alpha})=\alpha$且$E(\widehat{\beta})=\beta$作為一簡單的練習（見習題 14－34），亦即$\widehat{\alpha}$與$\widehat{\beta}$均為不偏估計值。

(d)$\widehat{\alpha}$與$\widehat{\beta}$的變異數均很容易可計算出（見習題 14－35）我們得

$$V(\widehat{\alpha})=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$V(\widehat{\beta})=\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right]\sigma^2 \qquad (14-9)$$

(e)事實上$\widehat{\alpha}$與$\widehat{\beta}$為α，β的最佳線性不偏估計值，亦即在所有不偏的線性估計值中，$\widehat{\alpha}$與$\widehat{\beta}$為變異數最小者，這是普遍的Gaus-Markoff 定理的一種特殊狀況，此定理說在某些條件下，最小平方估計值與最佳線性不偏估計值永遠相同。

(f)最小平方法亦可應用到非線性模型，例若$E(Y)=\alpha X+\beta X+r$，我們可估計α，β與r，以便$\sum_{i=1}^{n}[Y_i-(\alpha x_i^2+\alpha x_i+r)]^2$為最小。

(g)若我們再另外假定隨機變數ε有$N(0,\sigma^2)$的分配，我們可應用ML法去估計參數α與β，而這些估計值正如由最小平方估計值獲得的一樣。（這是因為假定常態的結果，否則並不一定成立）。

【例題14－16】 This example is discussed by Y.V.Linnik in Method of Least Squares and principles of the theory of Obserrations, Pevgamon Press, New York, 1961, the data in this example were obtained by Mendel'ejev and reportee in Foundations of Chemistry.（見表 14－5）。本例討論關於硝酸鈉（$NaNO_3$）在各種水溫（°C）下的溶解情形。如圖示的溫度下，Y份的$NaNO_3$溶解於 100 份水中，將這些數據描點得如圖 14－6 的散佈圖。

表 14 － 5

T	Y	T	Y
0	66.7	29	92.9
4	71.0	36	99.4
10	76.3	51	113.6
15	80.6	68	125.1
21	85.7		

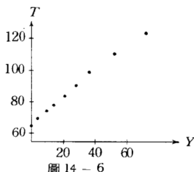


圖 14 － 6

此恰適於$E(Y)=bT+a$式的模型，使用上述的最小平方法我們得$\widehat{b}=0.87$，且$\widehat{a}=67.5$。

§ 14—6 相關係數 (The Correlation Coefficient)

在前節我們關心序對（X，Y）的值，但我們一再指出X並不被考慮爲隨機變數，然而由二維隨機變數（X，Y）可有隨機樣本（X_1，Y_1）……（X_n，Y_n）的產生，與二維隨機變數有關的重要參數爲相關係數ρ_{xy}

習慣用以估計ρ的是樣本相關係數（Sample correlation coefficient），定義爲：

$$\gamma=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

爲了計算方便起見，將γ化簡如下

$$\gamma=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-(\sum_{i=1}^{n}Y_i)^2}}$$

【例題 14 － 17】

表 14 － 6

X（速度，km/sec）	11.93	11.81	11.48	10.49	10.13	8.87
Y（高度，km）	62.56	57.78	53.10	48.61	44.38	40.57

本題數據代表第 1242 號流星的速度（km/sec）與高度（km）reported in the " Smithsonian Contrifutions to Astrophysics " from the Proceedings of the Symposium on Astronomy and Physics of Meteors, Cambridge, Mase, Aug, 28 – Sept. 1, 1961. 直接計算即可得$r=0.94$。

§14—7　信賴區間　(Confidence Intervals)

到目前我們只是討論有關如何獲得未知參數的點估計值。在本章開頭我們亦曾提過，有的他種方法往往可以導出相當有意義的結果。

假設X為$N(\mu, \sigma^2)$的分配，其中σ^2假定已知，而μ為未知參數，令$X_1 \cdots\cdots X_n$為取自X的隨機樣本且令$\overline{X}$為樣本平均數。

我們知道$\overline{X}$有$N(\mu, \sigma^2/n)$的分配，因此$z=[(\overline{X}-\mu)/\sigma]\sqrt{n}$有$N(0, 1)$的分配，注意雖然$z$決定於$\mu$，但其機率分配並不決定於$\mu$，這點事實我們可加以有利的應用如于

考慮

$$2\Phi(z)-1=p\left(-z\leq\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\leq z\right)$$

$$=p\left(-\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}-\overline{X}\leq-\mu\leq+\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}-\overline{X}\right)$$

$$=p\left(\overline{X}-\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{X}+\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

最後一道機率敘述必須很小心的加以解釋，它並不是說參數μ落在將定區間內的機率等於$2\Phi(z)-1$；μ是個參數，不管其是否落在上述區間上，上面的機率敘述應該解釋為：$2\Phi(z)-1$等於隨機區間$(\overline{X}-z\sigma/\sqrt{n}, \overline{X}+z\sigma/\sqrt{n})$內包含$\mu$的機率。這樣的區間我們稱為$\mu$的一個信賴區間(confidence interval for μ)因為z值是由我們決定的，我們可選擇它使得上面的機率等於$1-\alpha$，由此z就由關係式$\Phi(z)=1-\alpha/2$所定義，z的值記為$K_{1-\alpha/2}$可由常態分配表獲得(見圖14－7)亦即有$\Phi(K_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$。

總之，區間$(\overline{X}-n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2}, \overline{X}+n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2})$為參數$\mu$的一個信賴區間，其信賴係數為$(1-\alpha)$。或$(1-\alpha)$ 100％的信賴區間。

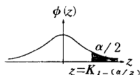


圖14－7

假設X代表有一件裝備的壽命長，若有100件接受試驗得其平均壽命長為$\overline{X}=501.2$(小時)，假定σ已知為4(小時)，若我們想獲得μ的95％的信賴區間，因此求得$\mu=E(X)$的信賴如下：

$$501.2-\frac{4}{10}(1.96),\ 501.2+\frac{4}{10}(1.96)$$

變為$(500.4, 502.0)$

有一點須再加以闡述的，即當我們說$(500.4, 502.0)$為μ的95％信賴區間時，我們並不說95％的樣本平均壽命長會落在這區間。當下次我們再抽取

一隨機樣本時，X 可能就不一樣，因此信賴區間的端點亦將不同。所以當我們說（500.4，502.0）是 μ 的95％信賴區間時，我們是說95％的時間 μ 將被包含含在區間（$\overline{X}-1.96\,\sigma/\sqrt{n}$，$\overline{X}+1.96\,\sigma/\sqrt{n}$）內。

【註明】 信賴區間的建立並不具唯一性，正如同一個參數有許多（點）估計值，因此我們可以建立許多信賴區間，雖然我們並不討論所謂"最佳"信賴區間的問題，但我們仍然描述一項明顯的事實，若要比較兩個具有相同信賴係數的信賴區間，我們將選擇那個期望長度較短的區間。

就上述的信賴區間而言，長度 L 可寫為

$$L=(\overline{X}+n^{-1/2}\,\sigma K_{1-\alpha/2})-(\overline{X}-n^{-1/2}\,\sigma K_{1-\alpha/2})$$

$$=2\sigma n^{-1/2}K_{1-\alpha/2}$$

由於 L 是個常數，進一步解得

$$n=(2\sigma K_{1-\alpha/2}\,L)^2$$

因此我們可決定 n（對已知 α 與 σ），以便使信賴區間有一指定的長度，通常常（如上例所述），L 將是 n 的遞減函數，也就是說要使 L 愈短，則必須 n 愈大。

§14－8 Student's t－分配

上例我們在分析時均假定變異數 σ^2 為已知，但若我們未知 σ^2 值時，我們將應如何修正分析的步驟呢？

假定估計 σ^2 的不偏估計值為

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

我們考慮隨機變數

$$t=\frac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}} \qquad (14-10)$$

顯然地，我們可感覺出隨機變數 t 的機率分配將較 $z(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}/\sigma$，複雜，因為在 t 定義內的分子和分母都是隨機變數，而 z 只是 $X_1\cdots\cdots X_n$ 的線性函數。為獲得 t 的機率的分配我們將利用下列事實。

(a) $z=(X-\mu)\sqrt{n}/\sigma$ 有 $N(0,1)$ 的分配。

(b) $V=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2$ 有自由度 $n-1$ 的Chi-square 的分配（見定理13－4）。

(c) z 與 V 為獨立隨機變數。（這證明很難，在此不證）。

利用下面的幫助，我們可得 t 的 pdf

【定理14－3】假假設隨機變數 z 與 V 彼此獨立且分別有 $N(0,1)$ 與 χ^2_k 的分配，定義為

$$t=\frac{z}{\sqrt{(V/K)}}$$

則 t 的 pdf 為

$$h_k(t)=\frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}$$

$$-\infty<t<\infty \qquad (14-11)$$

此分配稱為自由度 k 的 Student's　t－分配。

【註明】 (a)在此不證明本定理，而在習題中提出來（見習題 14－17）這定理是一個很有用的工具，利用它我們很快就可求出 $h_k(t)$，首先我們必須決定 $\sqrt{V/K}$ 的 pdf，而其很容易由已知 V 的 pdf 獲得。然後應用定理 6－5 得兩獨立隨機變數之商的 pdf。

(b)利用本定理可直接求得隨機變數 $t=(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}/\hat{\sigma}$ 的 pdf。此隨機變數有（$n-1$）自由度的 Student's　t－分配。雖然 t 值決定於 μ 而 t 的分配並不決定於 μ。

(c)如圖 14－8 所示，圖 h_k 是對稱的，事實上它類似於常態分配圖。且讀者可證得

$$\lim_{k\to\infty} h_k(t)=(1/\sqrt{2\pi})\,e^{-t^2/2}$$

(d)因為此分配非常重要，所以已被製成圖表（見附錄）對已知 α，$0.5<\alpha<1$，滿足條件

$$\int_{-\infty}^{t_{k,\alpha}} h_k(t)\,dt=\alpha$$

的值 $t_{k,\alpha}$ 已被製成表（見圖 14－9）（對於滿足 $0<\alpha<0.5$ 的 α 值，由於分配對稱的關係，所以仍可利用表值）。

(e)本分配的命名用以紀念英國統計學家 W. S. Gosset 他以筆名"Student"發表其研究成果。

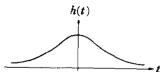


圖 14－8

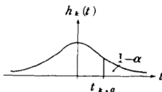


圖 14－9

我們現在回頭看看本節一開始所討論的問題。若變異數未知，我們如何獲得常態分配平均數的信賴區間呢？

類似於我們在第 14－7 節中使用的方法，我們可以獲得 μ 的信賴區間其信

賴係數為 $(1-\alpha)$：

$$\left(\overline{X}-n^{-1/2}\,\widehat{\sigma}\,t_{n-1,1-\alpha/2}\ ,\ \overline{X}+n^{-1/2}\,\widehat{\sigma}\,t_{n-1,1-\alpha/2}\right)$$

由此知上述的信賴區間與以前的信賴區間有相同的結構，主要不同的地方是已知值 σ 被換成估計值 $\widehat{\sigma}$，以前由常態分配查得的常數 $K_{1-\alpha/2}$ 被 t 分配表的 $t_{n-1,1-\alpha/2}$ 所取代。

【註明】 上述信賴區間長度 L 等於

$$L=2\,n^{-1/2}\ t_{n-1,1-\alpha/2}\ \widehat{\sigma}$$

因為 $\widehat{\sigma}$ 決定於樣本值 $(X_1\cdots\cdots X_n)$ 而 L 則決定於 $\widehat{\sigma}$，因此 L 不是一個常數

【例題 14－18】 觀測某一型式電線的電阻，得十個觀測值 $X_1\cdots\cdots X_{10}$ 假設 $\overline{X}=10.48$（歐姆）且 $\widehat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2}=1.36$（歐姆），若令假定 X 有 $N(\mu,\sigma^2)$ 的分配，且我們想獲得一信賴係數為 0.90 之 μ 的信賴區間。因此 $\alpha=0.10$，由 t 一分配表我們得 $t_{9,0.95}=1.83$，因此欲求的信賴區間為

$$\left(10.48-\frac{1}{\sqrt{10}}(1.36)(1.83)\ ,\ 10.48+\frac{1}{\sqrt{10}}(1.36)(1.83)\right)$$
$$=(9.69\ ,\ 11.27)$$

§14—9 再論信賴區間 (More on Confidence Intervals)

雖然我們並不欲對本主題作一般性的討論，但我們將繼續考慮一些重要的例子。

有時，我們想獲一個未知參數之特殊函數的信賴區間；若此函數為單調函數，則這可由下例加以說明。

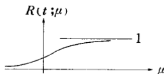


圖 14－10

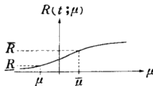


圖 14－11

【例題 14－19】 假設產品壽命長 X 的分配為 $N(\mu,\sigma^2)$，若 σ^2 為已知，產品可用 t 小時的可靠性為

$$R(t;\mu)=p(X>t)=1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

因為對所有 μ 值 $\dfrac{\partial R(t;\mu)}{\partial\mu}>0$，所以對每一固定值 t，$R(t;\mu)$

均是μ的遞增函數（見圖14－10），於是我們可依下述方法求得$R(t;\mu)$的信賴區間，令$(\underline{\mu},\overline{\mu})$為$\mu$的信賴區間，此區間已在14－7節中求出。且令$\underline{R}$與$\overline{R}$分別為$R(t;\mu)$我們欲求信賴區間的下上端點。若定義$\underline{R}$及$\overline{R}$的關係式為

$$\underline{R}=1-\Phi\left(\frac{t-\underline{\mu}}{\sigma}\right) \qquad \overline{R}=1-\Phi\left(\frac{t-\overline{\mu}}{\sigma}\right)$$

我們得$p(\underline{R}\le R\le\overline{R})=p(\underline{\mu}\le\mu\le\overline{\mu})=1-\alpha$。因此$(\underline{R},\overline{R})$代表信賴係數為$(1-\alpha)$之$R(t;\mu)$的信賴區間。（見圖14－11）

讓我們以第14－7節所獲的樣本值來說明本方法。假設我們想求組組件使用$t=500$小時可靠性的信賴區間，因為我們發現$\underline{\mu}=500.4$且$\overline{\mu}=502.0$，所以

$$\underline{R}=1-\Phi\left(\frac{500-500.4}{4}\right)=0.6554$$

$$\overline{R}=1-\Phi\left(\frac{500-502}{4}\right)=0.6915$$

到目前為止我們所考慮的僅是信賴區間的兩側，亦即我們已獲得兩個統計量（有時稱為信賴上界和信賴下界）$L(X_1\cdots\cdots X_n)$與$\mu(X_1\cdots\cdots X_n)$使得$p[L\le\theta\le\mu]=1-\alpha$其中$\theta$為未知參數。

有時我們只興趣於獲得單邊的信賴區間，如下列型式：

$$p[\theta\le\mu]=1-\alpha \qquad \text{或} \qquad p[L\le\theta]=1-\alpha$$

讓我們以例題來作上述的說明。

【例題14－20】 假設X有$N(\mu,\sigma^2)$的分配且我們想求未知參數σ^2的單邊信賴區間。令$X_1\cdots\cdots X_n$為取自X的隨機樣本。

由定理13－4知$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\sigma^2$有$\chi^2_{n-1}$的分配，因此從Chi-square分配表上我們查得一數$\chi^2_{n-1,1-\alpha}$使

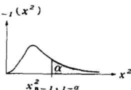


圖14－12

$$p\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{n-1,1-\alpha}\right]=1-\alpha$$

（見圖14－12）上述機率可寫為

$$p\left[\sigma^2\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right]=1-\alpha$$

因此$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/\chi^2_{n-1,1-\alpha},\ \infty\right)$是我們所要的係數為$1-\alpha$之$\sigma^2$的單邊信賴區間。

【例題 14－21】 假設電子裝備的壽命X有參數$1/\beta$的指數分配，因此$E(X)=\beta$，令$X_1 \cdots\cdots X_n$為取自X的樣本。在例題14－7我們發現 $\sum_{i=1}^{n} X_i / n$ 為β的ML估計值，由定理10－9的推廣中知$2n\overline{X}/\beta$有χ^2_{2n}的分配，因此$p[2n\overline{X}/\beta \geq \chi^2_{2n,1-\alpha}]=\alpha$，其中數$\chi^2_{2n,1-\alpha}$乃由chi-square分配表獲得。

若我們想獲可靠性的（低）信賴區間$R(t;\beta)=p(X>t)=e^{-t/\beta}$，則我們處理如下：將上個不等式乘以$(-t)$，再整理得

$$p[(-t/\beta) \geq -t\chi^2_{2n,1-\alpha}/\overline{X}_{2n}]=1-\alpha$$

因為e^x為x的遞增函數，所以

$$p\{R(t;\beta)=e^{-t/\beta} \geq exp[-\frac{t\chi^2_{2n,1-\alpha}}{\overline{X}2n}]\}=1-\alpha$$

因此

$(exp[-t\chi^2_{2n,1-\alpha}/\overline{X}2n],\infty)$是信賴係數$(1-\alpha)$之$R(t;\beta)$的單邊信賴區間。

讓我們以求二項分配之隨機變數X有關其參數p的信賴區間作為對信賴區間的最後說明，我們只考慮重複次數n大到足以利用常態近似估計的情況。

令$X/n=h$代表在n次重複試驗中事件A出現的相對頻數，其$p(A)=p$，因此$E(h)=p$且$V(h)=pq/n$其中$q=1-p$。

以常態分配近似估計二項分配，我們寫

$$p[\frac{|h-p|}{\sqrt{pq/n}} \leq K]=p[|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}]$$
$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$
$$=2\Phi(K)-1$$

其中$\Phi(K)=(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$，因此若我們令上述機率等於$(1-\alpha)$，我們可由常態分配表獲得$K$值，亦即$2\Phi(K)-1=1-\alpha$得$K=K_{1-\alpha/2}$，因為我們的興趣在求$p$的信賴區間，我們必須將上述不等式$\{|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$改寫為以$p$表示的不等式。此$\{|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$則相當於$\{(h-p)^2 \leq K^2(1-p)p/n\}$，若我們考慮一個$(h,p)$的座標系統，上述不等式代表一個橢圓的邊界及其內部，此橢圓的形狀決定於K及n，若n愈大，則橢圓愈扁狹。

考慮hp平面上一點$Q(h,p)$（見圖14－13）Q將是個"隨機"點，其意義為它的第一座標h將由試驗的結果決定。若且唯$\{|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$，則$Q$必將落在橢圓內，此事件發生的機率等於$2\Phi(K)-1$。若我們要使這機率等於$(1-\alpha)$，則必須選擇適合的$K$值，亦即$K=K_{1-\alpha/2}$。

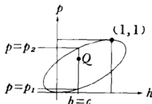


圖 14 － 13

現在p為未知數（當然那是我們問題所在），直線$h=c$（常數）將割此橢圓於兩點$p=p_1$與$p=p_2$（這很容易檢定，對一已知α與h，一定有兩個相異的P值存在。）

p_1與p_2值可由解p的二次方程式：$(h-p)^2=K^2(1-p)p/n$獲得，其解為

$$p_1=\frac{hn+(K^2/2)-K[h(1-h)n+(K^2/4)]^{1/2}}{n+K^2}$$
$$p_2=\frac{hn+(K^2/2)+K[h(1-h)n+(K^2/4)]^{1/2}}{n+K^2} \qquad (14-12)$$

因此$\{|h-p|\le K\sqrt{pq/n}\}$相當於$\{p_1\le p\le p_2\}$，因此若選擇$K$使先前的事件機率等於$(1-\alpha)$，則我們將獲信賴係數為$(1-\alpha)$之$p$的信賴區間，稱$(p_1, p_2)$。

總之：為了要獲得信賴係數為$(1-\alpha)$之$p=p(A)$的信賴區間，我們完成n次試驗並計算事件A的相對頻數h。然後依式（14－12）計算出p_1與p_2，其中K由常態分配表決定之。但必須記得此種方法只當n大到足夠利用常態分配近似估計二項分配時才真確。

【註明】式（14－12）內$h=X/n$，其中X為事件A發生的次數。於是$X=nh$且$n-X=n(1-h)$，若除了n外，X與$n-X$均相當大則p_1與p_2均可分別近似估計為

$$p_1\simeq h-\frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)}\ ,\ p_2\simeq h+\frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)}$$

【例題 14 － 22】 某一生產程序在某一特定週內生產79件產品，其中發現3件為不良品，因此$h=3/79=0.038$，利用上面的方法我們得不良品的機率p之95％的信賴區間為$(0.013, 0.106)$。

【例題 14 － 23】 某2廠有一大堆存貨，其中有些存貨是由較劣的方法製成，其餘的則來自較新方法製成。若我們由這堆存貨中隨機抽取3000件，發現1578件是由較劣方法製成，則利用上面p_1與p_2的估計值，我們求出p（＝由較劣方法製成的比率）之99％的信賴區間：

$$h=\frac{1578}{3000}=0.526 \qquad K=2.576$$

$$p_1=0.526-\frac{2.576}{\sqrt{3000}}\sqrt{(0.526)(0.474)}=0.502$$

$$p_2=0.526+\frac{2.576}{\sqrt{3000}}\sqrt{(0.526)(0.474)}=0.550$$

習題

14－1 假設一物體互不影響地被兩測量器測量，令L_1和L_2分別表第1和第2測量器測得的長度。如果測量器被準確地校準的話，我們可假定$E(L_1)=E(L_2)=L$（真正長度），然而器材的準確性並沒有一定要相同，如果我們以變異數測量準確性，則$V(L_1)\neq V(L_2)$，如果我們利用線性組合$Z=aL_1+(1-a)L_2$估計L，我們立即得$E(Z)=L$，亦即Z是L的不偏估計值，問如何選擇a值，$0<a<1$，才能使Z的變異數最小？

14－2 假設X的期望值μ，變異數σ^2，$(X_1,\cdots\cdots,X_n)$是X的樣本。證明如果適當選擇C值，則$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$是$\sigma^2$的不偏估計值，求$C$的值。

14－3 假設$X_1,\cdots\cdots,X_{200}$是X的200個獨立觀察值，已知$\sum_{i=1}^{200}X_i=300$，$\sum_{i=1}^{200}X_i^2=3754$。利用這些值求$E(X)$和$V(X)$的不偏估計值。

14－4 隨機變數X有pdf $f(x)=(\beta+1)x^{\beta}$ $0<x<1$

(a)根據樣本$X_1,\cdots\cdots,X_n$，求β之ML估計值。

(b)如果樣本值是0.3，0.8，0.27，0.35，0.62，和0.55，計算(a)的估計值。

14－5 表14－4的數據是電話桿邊材深度的分配，假定我們考慮的隨機變數有分配$N(\mu,\sigma^2)$，試求μ和σ^2的ML估計值。

表14－4

邊材深度(吋)	頻數	邊材深度(吋)	頻數
1.0	2	3.7	123
1.0	29	4.0	82
1.6	62	4.3	48
1.9	106	4.6	27
1.2	153	4.9	14
2.5	186	5.2	5
2.8	193	5.5	1
3.1	188	總共頻數1370	
3.4	151		

14－6　假設電子儀器的壽命T有下面的pdf

$$f(t)=\beta e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t>t_0>0$$
$$=0 \quad , \text{elsewhere}$$

（T有截掉t_0左側的指數分配）

假設試驗n件得T_1，T_2，……T_n

(a)假定t_0是已知數，試求β之ML估計值。

(b)假定t_0是未知數，但β已知，試求t_0之ML估計值。

14－7　如同習題14－6的情況，但這次我們試驗N件試驗了T_0（$T_0>t_0$）小時，在T_0小時內壞掉的有k件，試回答習題14－6之(a)。

14－8　如果X均勻分配在（$-\alpha$，α）上，依據X的樣本X_1，X_2，……X_n，求α的ML估計值。

14－8　(a)假定有一實驗，每次重複$P(A)=p$，我們進行此項實驗到A第一次發生，假設需n_1次重複。重頭又開始實驗，這次實驗A第一次發生需要n_2次重複，如此下去我們得到樣本n_1，n_2，……，n_k，利用這組樣本，求p的ML估計值。

14－10　(b)假設k很大，試求$E(p)$和$V(p)$的近似值，這兒p是(a)所求得的ML估計值。

14－10　假設零件的壽命有指數分配，試驗此種零件得下列觀察值（小時）：108，212，174，130，198，169，252，168，143，利用這些樣本值，求零件使用150小時的可靠性（Reliability）的ML估計值。

14－11　下列的數據代表燈泡的壽命（小時）

1009，1085，1123，1181，1235，1249，
1263，1292，1327，1338，1348，1352，
1359，1368，1379，1397，1406，1425，
1437，1438，1441，1458，1483，1488，
1499，1505，1509，1519，1541，1543，
1548，1549，1610，1620，1625，1638，
1639，1658，1673，1682，1720，1729，
1737，1752，1757，1783，1796，1809，
1828，1834，1871，1881，1936，1949，
2007

假設壽命是常態分配，試由此樣本值求燈泡使用1600小時的可靠性的ML估計值。

14－12　假設有兩個習題14－11的燈泡被(a)串聯，(b)並聯使用，試依據習題14－11的樣本值求在每種情形中使用1600小時的可靠性的ML估計值。

14－13 假設質點依卜瓦松分配由放射性物質放出。亦即，如果X是在t分內放出之質點個數，則$P(X=k)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$。不用記錄質點放射出的眞實個數，假設我們注意沒有質點放射出的次數，特別假設有30件相同之放射性物體被觀察50秒，其中25件至少有一質點放射出，利用此訊息求λ的ML估計值。

14－14 X有分配$N(\mu, 1)$，取X的20個觀察值，但我們不記其眞値僅注意X是否爲負數。假設事件$\{X<0\}$發生14次，利用此訊息，求μ的ML估計值。

14－15 假設X有Gamma分配，亦即其pdf爲

$$f(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \qquad x>0$$

假設r爲已知數，$X_1, \cdots\cdots, X_n$是X的樣本，試依據此樣本求λ的ML估計值。

14－16 假設X有Weibull分配，其pdf爲

$$f(x)=(\lambda\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} \quad , \quad x>0$$

假設α爲已知數，試依據n個樣本$X_1, \cdots\cdots, X_n$求λ的ML估計值。

14－17 證明定理14－3〔Hint 見本定理後的Note (a)〕。

14－18 假設X有分配$N(0, 1)$，t有Student's t-分配，自由度是(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 25，試比較$P(X\geq 1)$與$P(t\geq 1)$之值。

14－19 假設X有分配$N(\mu, \sigma^2)$，由樣本$X_1, \cdots\cdots, X_{30}$得到$\sum_{i=1}^{30} X_i=700.8$，$\sum_{i=1}^{30} X_i^2=16395.8$，試求$\mu$的95%(兩尾)信賴區間。

14－20 假設X有分配$N(\mu, 4)$，由樣本$X_1, \cdots\cdots, X_{25}$得到$\bar{X}=78.3$，試求$\mu$的98%(兩尾)信賴區間。

14－21 假設零件的壽命有常態分配$N(\mu, 9)$，試驗20件得$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{20}$，假設$\bar{X}=100.9$(小時)，試求可靠性$R(100)$的99%(兩尾)信賴區間。

14－22 求習題14－21之$R(100)$之99%單邊(下)信賴區間。

14－23 假設X有分配$N(\mu, \sigma^2)$這兒μ和σ^2都是未知數，由樣本$X_1, \cdots\cdots, X_{15}$得到$\sum_{i=1}^{15} X_i=8.7$，$\sum_{i=1}^{15} X_i^2=27.3$，試求$\sigma^2$之95%(兩尾)信賴區間。

14－24 試驗100件零件，其中93件可操作500小時以上，令零件可操作500小時以上的機率等於 p，試求 p 的95％兩尾信賴區間。〔hint 利用14－21式〕。

14－25 假設螺栓的長度 X 有常態分配 $N(\mu, 1)$。製造許多的螺栓，隨後將它們分成兩堆，第一堆只含那些 $X>5$ 的，而第二堆則含其他的螺栓。由第一堆取 n 個螺栓，測出其長度，於是我們得到截掉5左側的常態隨機變數 Y 的一組樣本 $Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n$。依據 $(Y_1, \cdots\cdots, Y_n)$ 的 μ 的 ML 估計值所需的方程式。

14－26 （F 分配），令 X 和 Y 是獨立隨機變數分別有分配 $\chi^2_{n_1}$ 和 $\chi^2_{n_2}$。令 F 定義為 $F=(X/n_1)/(Y/n_2)=n_2X/n_1Y$（此隨機變數在統計應用上很重要），證明 F 的 pdf 為

$$h(f)=\frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}f^{(n_1/2)-1}$$

$$(1+(n_1/n_2)f)^{-(1/2)(n_1+n_2)} \qquad f>0$$

〔此稱為自由度是 (n_1, n_2) 的（Snedecor's F分配），由於其重要性，與 F 有關的機率已被製成圖表〕

〔hint　利用定理6－5，導出上面的 pdf〕

14－27 假定 $n_1>n_2>2$，試劃出習題14－26之 h 的圖形。

14－28 下面的理由說明 F 分配的重要性。假設 X 和 Y 是獨立隨機變數，分別有分配 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$，$N(\mu_y, \sigma_y^2)$，令 $X_1, \cdots\cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, \cdots\cdots, Y_{n_2}$ 分別是 X 和 Y 的隨機樣本如果適當的選取 C 值，則統計量 $C\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2 / \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$ 有 F 分配，試證之且求 C 值，又此分配的自由度為何？

14－29 假設隨機變數 t 有自由度是1的Student's t 分配，則 t^2 的分配為何？試加以證實。

14－30 假設 X 有常態分配，X_1, X_2, X_3, X_4 是其隨機樣本，X 為樣本平均值。如果 $\sum_{i=1}^{4}(X_i-X)^2=48$，試以 X 表出 $E(X)$ 的95％（兩尾）信賴區間。

14－31 下面是 (X, Y) 的樣本，利用這些值，求樣本相關係數。

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	1	2

14－32 假設 $E(Y)=\alpha X+\beta$，樣本 $(x_1, Y_1)\cdots\cdots, (x_{50}, Y_{50})$ 滿足 $x=Y=0$，$\sum_{i=1}^{50}x_i^2=10$，$\sum_{i=1}^{50}Y_i^2=15$，$\sum_{i=1}^{50}x_iY_i=8$。

(a)試決定 α 和 β 之最小平方估計值，α 和 β。

(b) $\sum_{i=1}^{50}[Y_i-(\alpha x_i+\beta)^2$ 極小值為何？

14－33 證明（14－7）式和（14－8）的的α和β是不偏估計值。

14－34 證明（14－9）式的$V(\alpha)$和$V(\beta)$。

14－35 假設$E(Y)=\alpha X^2+\beta X+\gamma$，這兒$X$值已被指定，依據$(X_i, Y_i)$，$i=1, 2, \cdots\cdots n$，決定$\alpha$，$\beta$和$\gamma$的最小平方估計值。



14－1

解：$V(Z)=a^2V(L_1)+(1-a)^2V(L_2)$

$$\frac{dV(Z)}{a}=2aV(L_1)+2(1-a)(-1)V(L_2)=0$$

$$\Rightarrow 2a[V(L_1)+V(L_2)]=2V(L_2)$$

$$a=\frac{V(L_2)}{V(L_1)+V(L_2)}$$

14－2

解：$E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i-1}-X_i)^2]$

$$=CE[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i-1}^2-2X_{i-1}X_i+X_i^2)]$$

$$=C\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma^2+\mu^2-2\mu_2+\sigma^2+\mu^2)$$

$$=C2(n-1)\sigma^2$$

$$=\sigma^2 \qquad if \quad C=\frac{1}{2(n-1)}$$

14－3

解：$E(X)=E(X)=\frac{300}{200}=1.5$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=\frac{3754}{200}-2.25=16.52$$

14－4

解：(a) $L(X_1, \cdots\cdots, X_n, \beta)=(\beta+1)^n(X_1\cdots\cdots X_n)\beta$

$$ln L(X_1, \cdots\cdots, X_n, \beta)=n\,ln(\beta+1)+\beta\sum_{i=1}^{n}ln X_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}=0 \Rightarrow n\frac{1}{\beta+1}+\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)=0$$

$$\beta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}-1$$

(b) 0.3, 0.8, 0.27, 0.35, 0.62, 0.55

$$\frac{-6}{\sum_{i=1}^{6} \ln(X_i)}-1=\frac{-6}{-2.56}-1=2.35-1=1.35$$

14－5

解： $\mu=\sum_{i=1}^{15} D_i P_i=\sum_{i=1}^{15} D_i \frac{f_i}{f_{ToTal}}=\frac{1}{1370}\sum_{i=1}^{15} D_i f_i$

$$=\frac{3992.3}{137.0}=2.9$$

$$\sigma^2=\frac{1}{1370}=\sum_{i=1}^{15} f_i(D_i-\mu)^2=1.05$$

14－6

解： (a) $L(T_1, \cdots\cdots T_n, \beta)=\beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_0)}$

$$\ln L(T_1, \cdots\cdots, T_n, \beta)=n\ln\beta-\beta\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_0)$$

$$\frac{2 \ln L}{2\beta}=0 \Rightarrow n\frac{1}{\beta}=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_0)$$

$$\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_0)}=\frac{1}{T-t_0}$$

(b)由(a) $t_0=T-\frac{1}{\beta}$

14－7

解： $P(t>T_0)=\int_{T_0}^{\infty}\beta e^{-\beta(t-t_0)}dt$

$$=-e^{-\beta(t-t_0)}\Big|_{T_0}^{\infty}$$

$$=e^{-\beta(T_0-t_0)}$$

$$P(t>T_0)=\frac{n-k}{n}$$

$$\frac{n-k}{n}=e^{-\beta(\frac{T_o}{T}-t_o)}$$

$$\beta=\frac{ln(1-\frac{k}{n})}{t_o-T_o}=\frac{1}{T_o-t_o}\,ln(\frac{n}{n-k})$$

14－8

解：　$f(x;\alpha)=\frac{1}{2\alpha}$　　　$-\alpha\leq x\leq\alpha$

$=0$　　　其他

$\therefore f(\alpha;x_1\cdots\cdots x_n)=\frac{1}{(2\alpha)^n}$　　　$-\alpha\leq x_i\leq\alpha$

因爲此式爲遞減函數，故無法由微分求得。

因爲　$-\alpha\leq x_i\leq\alpha$　　$\therefore$　$max|x_i|\leq\alpha$

故$f(\alpha,x_1,\cdots\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\alpha)^n}\leqq\frac{1}{(2max|x_i|)^n}$

即α之最佳估計爲$max|x_i|$

14－9

解：(a)$Pn_1=q_1^{n-1}p$

$Pn_2=q_2^{n_2-1}p$

$Pn_k=q^{n_k-1}p$

$L(n_1,n_2,\cdots\cdots,n_k,p)=p^k q^{(n_1+\quad+n_k)-k}$

$$lnL(n_1,n_2,\cdots\cdots,n_k,p)=K\,ln_p+(\sum_{i=1}^{k}n_i-K)\,lnq$$

$$\frac{d\,lnL}{dp}=0\Rightarrow K\frac{1}{p}+(\sum_{i=1}^{n}n_i-K)\frac{(-1)}{q}=0$$

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{K}(\sum_{i=1}^{n}n_i-K)$$

$$p=\frac{K}{\sum_{i=1}^{n}n_i}$$

(b)K則可看成二項式隨機函數

$E(\widehat{p})=p$　　　$V(\widehat{p})=E(\widehat{p^2})-E(\widehat{p})^2=0$

14－10

解：　$R(150)=F(t>150)$

$$=\int_{150}^{\infty}\beta e^{-\beta t}\,dt=e^{-150\beta}$$

$$L(t_1, \cdots\cdots, t_n, \beta) = \beta^n e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} t_i}$$

$$\ln L(t_1, \cdots\cdots, t_n, \beta) = n \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\frac{2 \ln L}{2 \beta} = 0 \Rightarrow \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

$$\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{n}}$$

故 $\beta = e^{-150\beta} = e^{-160 \frac{1}{139.3}} = 0.341$

14 − 11

解：　$R(1600) = e^{-1600 \frac{1}{n} t} = e^{-1600 \frac{1}{1526}}$

$= e^{-1.05} = 0.35$

14 − 12

解：　(a) $R(1600) = p(X_1 > 1600)\, p(X_2 > 1600)$

$= e^{-1600(2\beta)}$

$= e^{\frac{-1600 \sum^{2} t_i}{n}} = e^{-2.1} = 0.23$

(b) $R(1600) = 1 - (1 - e^{-1600\beta})^2$

$= 2 e^{-\frac{\sum^{1} t_i}{n}} (1 - e^{-\frac{\sum^{1} t_i}{n}})$

$= 2(0.35)(0.65) = 0.45$

14 − 13

解：　$t = 50$ 秒

$P(X = 0) = e^{-\lambda t} = e^{-50\lambda}$

P（樣本$X = 0$）$= \frac{30 - 25}{30} = \frac{1}{6}$

$\therefore e^{-50\lambda} = \frac{1}{6}$

$\lambda = 0.034$

14 − 14

解：　$P(X < 0) = \phi(\frac{0 - \mu}{1}) = \phi(-\mu)$

P（樣本$X < 0$）$= \frac{14}{20} = 0.7$

$\phi(-\mu) = 0.7 \qquad \mu = -0.52$

14 – 15

解 $L(X_1, \cdots\cdots, X_n; \lambda)$

$$\frac{\lambda^n (\lambda^n \sum_{i=1}^{n} X_i)^{r-1}}{\Gamma(r)^n} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$l \quad ln\, L = n(r\, ln\, \lambda - ln\, \Gamma(r)) + (r-1) \sum_{i=1}^{n} ln X_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\frac{2\, ln\, L}{2\, \lambda} = 0 \Rightarrow nr \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\lambda = \frac{r}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}} = \frac{n}{X}$$

14 – 16

解：$L(X_1, \cdots\cdots, X_n; \lambda) = (\lambda\alpha)^n \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}}$

$$ln\, L = n\, ln(\lambda\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} ln X_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$$

$$\frac{2\, ln\, L}{2\, \lambda} = 0 \Rightarrow n \frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}}$$

14 – 17

解： $\mu = \sqrt{\frac{V}{K}} \cdot \frac{d\mu}{dV} = \frac{1}{2\sqrt{VK}}$

$$f(\mu) = f(v) \left| \frac{dv}{d\mu} \right| = f(K, \mu)\, 2K\mu$$

$$= \frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1} \Gamma(\frac{k}{2})} \mu^{k-1} e^{-\frac{ku^2}{2}}$$

Z 之 pdf 爲 $\quad f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

$t = \frac{Z}{\mu} \qquad z = \mu t$

故 $g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu t)\,g(\mu)\,|\mu|\,du$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma(\frac{k}{2})}\mu^{k}e^{\frac{-u^{2}}{2}(k+t^{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du$$

設 $\frac{u^{2}}{2}(k+t^{2})=s$ 　　　$\frac{ds}{du}=\mu(k+t^{2})$

$$g(t)=\int_{0}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma(\frac{k}{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(k+t^{2})}\left(\frac{2s}{k+t^{2}}\right)^{\frac{k-1}{2}}e^{-s}ds$$

$$=\frac{k^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(\frac{k}{2})}(k+t^{2})^{-\frac{k+1}{2}}\int_{0}^{\infty}s^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-s}ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}\left(1+\frac{t^{2}}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$　　得證

14－18

解：$P(X\geq 1)=1-\phi(1)=0.1587$

$5df\ P(t\geq 1)=1-p(t<1)=1-0.804$
$=0.196$

$10df\ P(t\geq 1)=1-0.811=0.189$

$15df\ P(t\geq 1)=1-0.822=0.185$　　（利表查表及外插法）

$20df\ P(t\geq 1)=1-0.822=0.178$

$25df\ P(t\geq 1)=1-0.825=0.175$

故自由度愈大⇒值愈接近

14－19

解：$\overline{X}$ 爲 $N(\mu,\frac{\sigma^{2}}{n})$ 分配

$\frac{(X-\mu)}{\sigma}\sqrt{n}$ 爲 $N(0,1)$ 分配

$(\overline{X}-\frac{z\sigma}{\sqrt{\pi}},\overline{X}+\frac{z\sigma}{\sqrt{\pi}})$ 爲 μ 之區間

$\phi(z)=1-\frac{\alpha}{2}=0.975\Rightarrow z=1.96$

$\sqrt{n}=\sqrt{30}=5.5$

$\sigma=[\frac{1}{29}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2]^{\frac{1}{2}}$

$=[\frac{1}{29}(16395.8-2(23.4)700.8+30(23.4)^2)]^{\frac{1}{2}}$

$=0.96$

$X=\frac{700.8}{300}=23.36$

故μ之95%區間為$(23.36-0.345, 23.36+0.345)=(23.315, 23.715)$。

14－20

解： $\sigma=\sqrt{4}=2$ $\overline{X}=78.3$

$\phi(z)=1-\frac{\alpha}{2}=0.995$ $z=2.57$

故區間為$(\overline{X}-\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+\frac{z\sigma}{\sqrt{n}})=(77.27, 79.33)$

14－21

解： μ之99%區間為$(100.9-\frac{2.57\times 3}{\sqrt{20}}, 100.9+\frac{2.57\times 3}{\sqrt{20}})$

$\phi(z)=1-0.005=0.995$

$z=2.57$

故$(\mu, \mu)=(99.15, 102.65)$

$$R=1-\phi(\frac{t-\mu}{\sigma})=1-0.6103=0.3897$$

$t=100$

$$R=1-\phi(\frac{t-\mu}{\sigma})=1-0.1897=0.8106$$

$\therefore(R, R)=(0.3897, 0.8106)$

14－22

解： $\frac{(X-\mu)}{\sigma}\sqrt{n}$為$N(0, 1)$分配

$P(\frac{(X-\mu)}{\sigma}\sqrt{n}\leq Z_o)=\phi(Z_o)=0.99$

$Z_o=2.33$

$\mu=-\infty$，$\mu=X+\frac{\sigma Z_o}{\sqrt{n}}=100.9+1.57=102.47$

$R=0$

$R=1-(\frac{100-\overline{\mu}}{3})=1-\phi(-0.83)=0.7967$

14－23

解：$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-X)^2}{\sigma^2}$ 爲 X_{14}^2 分配

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+15\overline{X}^2$

$=27.3-2\frac{8.7}{15}8.7+\frac{8.7}{15}8.7$

$=22.2$

$P[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-X)^2}{\sigma^2}\gtreqless X^2]=0.95$ ……………①

$X^2=X_{14\ 0\ 05}^2=6.571$

由①$P[\sigma^2\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{X^2}]=p[\sigma^2\le\frac{22.2}{6.57}]=0.95$

$\sigma^2=\frac{22.2}{6.57}=3.38$

故 σ^2 之區間爲 $(0, 3.38)$

14－24

解：$P_1=\frac{hn+(\frac{k^2}{2})-k[h(1-h)n+(\frac{k^2}{4})]^{\frac{1}{2}}}{n+k^2}$

$P_2=\frac{hn+(\frac{k^2}{2})+k[h(1-h)n+(\frac{k^2}{4})]^{\frac{1}{2}}}{n+k^2}$

$n=100$, $h=0.93$, $k=k_{1-\frac{\alpha}{2}}=k_{0.975}=1.96$

$\Rightarrow P_1=0.844$, $P_2=0.963$

$(0.844, 0.963)$

14－25

解：$f(y_i)=\frac{k}{\sqrt{2\pi}}exp[-\frac{1}{2}(y_i-\mu)^2]$ 　　$y_i\ge5$

$=0$ 　　$y_i<5$

$k=[1-\Phi(5-\mu)]^{-1}$

$$\Rightarrow L(y_1, \ldots\ldots, y_n; \mu) = \frac{k^n}{(\sqrt{2\pi})^n}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right]$$

$$lnL = -n(ln[1-\Phi(5-\mu)] + ln\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

$$\frac{2\,lnL}{2\mu} = 0 \Rightarrow -n\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(5-\mu)^2}}{1-\Phi(5-\mu)} + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu) = 0$$

μ能由上式解出。

14－26

解： 設$Z_1 = \frac{X}{n_1}$，$Z_2 = \frac{Y}{n_2}$，則Z_1，Z_2之pdf爲

$$f_1(Z_1) = n_1\frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})}(n_1Z_1)^{\frac{n_1}{2}-1}e^{-\frac{n_1z}{2}} \quad Z_1 > 0$$

$$f_2(Z_2) = n_2\frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}}\Gamma(\frac{n_2}{2})}(n_2Z_2)^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-\frac{n_2z_2}{2}} \quad Z_2 > 0$$

$$f = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad\qquad Z_1 = fZ_2$$

$$故\ h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(fZ_2)f_2(Z_2)\,|Z_2|\,dZ_2$$

$$= \int_0^{\infty} n_1n_2\frac{1}{2(\frac{n_1+n_2}{2})\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}(fZ_2n_1)^{\frac{n_1}{2}-1}$$

$$(n_2Z_2)^{\frac{n_2}{2}-1}e^{-z_2(\frac{n_1f}{2}+\frac{n_2}{2})}dz_2$$

$$s = Z_2\left(\frac{n_1f}{2}+\frac{n_2}{2}\right), \quad \frac{ds}{dZ_2} = \frac{n_1f}{2}+\frac{n_2}{2}$$

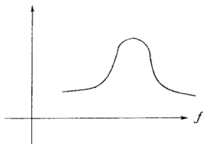
$$h(f) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}f^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}f\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\frac{n_1+n_2}{2}-1}ds$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} f^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}f\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$

14－27

解：　繪上題 $h(f)$ 之圖 $h(f)$



14－28

解：　由定理知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_x^2}$ 爲卡方分配。

自由度爲 n_1-1

$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma_y^2}$ 爲卡方分配

自由度爲 n_2-1

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2}{\sigma_x^2(n_1-1)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y)^2}{\sigma_y^2(n_2-1)}}$$ 爲 F 分配自由度爲 (n_1-1, n_2-1)

$$\therefore C=\frac{(n_2-1)\sigma_y^2}{(n_1-1)\sigma_x^2}$$

14－29

解：　$t=\dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{K}}}$, $Z: N(0, 1)$, $V: X_1^2$

$F=t^2=\dfrac{KZ^2}{V}$, $Z^2: X_1^2$, $V: X_1^2$

故 F 爲 F 分配自由度 $(-1, 1)$

14－30

解： $E(X)$ 之 confidence 區間為

$$\left(\overline{X}-n^{-\frac{1}{2}}\sigma\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+n^{-\frac{1}{2}}\sigma\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$n^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{48}{3}}=4$$

$$t_{3,0.975}=3.1824$$

故區間為 $(\overline{X}-6.365\ ,\ \overline{X}+6.365)$

14－31

解：
$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}$$

$$=\frac{7.4-9}{\sqrt{\frac{55}{5}-9\sqrt{2}}}=-0.8$$

14－32

解： (a)
$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(X_i-X)}{\sum_{i=1}^{50}(X_i-X)^2}=\frac{8}{10}=0.8$$

$$\beta=Y-\alpha X=0-0.8\times 0=0$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{50}[Y_i-(\alpha X_i+\beta)]^2=\sum_{i=1}^{50}[Y_i-0.8X_i]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{50}Y_i^2-1.6\sum_{i=1}^{50}X_iY_i+0.64\sum X_i^2$$

$$=15-1.6(8)+0.64(10)$$

$$=8.6$$

14－33

解： $E(r)=2pq+\infty p^2=\infty$

$\neq p/(1-p)$

當 $p\to 1$　　　$2pq+\infty p^2=\infty$

$\frac{p}{1-p}\to\infty$　二式逐漸接近

p	k	$\widehat{p}(A)$	$\widehat{r}$
q^2	0	0	0
$2pq$	1	$\frac{1}{2}$	1
p^2	2	1	∞

14－34

解： $$E(\alpha)=\frac{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)(X_i-\overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha X_i+\beta)(X_i-\overline{X})}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}X_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha X_i^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha X_i\overline{X}+\sum_{i=1}^{n}\beta X_i-\sum_{i=1}^{n}\beta\overline{X}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\overline{X^2}}$$

$$=\alpha$$

$$E(\beta)=E(Y-\alpha X)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(y_i)-\alpha X$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha X_i+\beta)-\alpha X=\frac{n}{n}\beta=\beta$$

14－35

解： $$V(\alpha)=E(\alpha^2)-E(\alpha)^2$$

$$E(\alpha^2)=\frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2(X_i-\overline{X})^2+2\sum_{j,i=1}^{n} Y_iY_j(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2\right]^2}$$

$$E(Y_i)^2=\sigma^2+(\alpha X_i+\beta)^2 \qquad \text{因} V(Y_i)=\sigma^2$$

$$E(Y_iY_j)=(\alpha Y_i+\beta)(\alpha Y_j+\beta)$$

$$\therefore E(\alpha^2)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2+(\alpha X_i+\beta)^2\right](X_i+\overline{X})^2+2\sum_{i\neq j=1}^{n}(\alpha X_i+\beta)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]^2}$$

$$(\alpha X_j+\beta)(X_i-\overline{X})(X_j-\overline{X})$$

$$=\frac{\sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}(\alpha X_i+\beta)(X_i-\overline{X})\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]^2}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}+\alpha^2$$

故 $V(\alpha)=\dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

$V(\beta)=\left[\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X^2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right]\sigma^2$ 同樣以

$E(Y_i^2)=\sigma^2+(\alpha X_i+\beta)^2$

$E(Y_iY_j)=(\alpha X_i+\beta)(\alpha X_j+\beta)$ 而易證之。

14－36

解： $s(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(\alpha x_i^2+\beta x_i+\gamma)\right]^2$

$\dfrac{\partial s}{\partial\alpha}=0$

$$2\sum_{i=1}^{n}\{[y_i-(\alpha x_i^2+\beta x_i+\gamma)][-x_i^2]\}=0$$

$\dfrac{\partial s}{\partial\beta}=0$

$$2\sum_{i=1}^{n}\{[y_i-(\alpha x_i^2+\beta x_i+\gamma)][-x_i]\}=0$$

$\dfrac{\partial s}{\partial\gamma}=0$

$$2\sum_{i=1}^{n}\{[y_i-(\alpha x_i^2+\beta x_i+\gamma)][-1]\}=0$$

整理之得

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^4+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^2$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + \gamma \sum_{i=1}^{n} (1) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 y_i & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma y_i & \Sigma x_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & n \end{vmatrix}}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^2 y_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & n \end{vmatrix}}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & \Sigma y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & n \end{vmatrix}}$$

14 − 37

解：　樣本X：$N(0, 1)$由表7

0.31　−0.51　−1.45　−0.35　0.18　0.09　0.00　0.11
−1.9　−1.07
0.90　−0.36　0.33　−0.28　0.30　−0.62　−0.43
−1.79　−0.9　−0.35

樣本$2X+2$：$N(2, 4)$即Z：

2.62　0.98　−0.9　1.3　2.36　2.18　2.0　2.22　−1.82
−1.82　−0
3.80　1.28　2.66　1.44　2.6　−3.24　−0.86　−1.58
0.02　1

(a)區間 $\left(\overline{Z}-\frac{Z_o\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{Z}+\frac{Z_o\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

即 $(0.042, 1.782)$

$$\begin{cases} \overline{Z} = 0.912 \\ \phi(Z_o) = 0.976 \\ Z_o = 1.96 \\ \sqrt{n} = 4.5 \end{cases}$$

(b)區間 $\left(Z-\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}t_{19,0.975} , Z+\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}t_{19,0.975} \right)$

即 $(0.052 , 1.772)$

$$\begin{cases} Z=0.912 \\ t_{19,0.975}=2.093 \\ \widehat{\sigma}=1.85 \text{（代公式）} \end{cases}$$

(c)(a)較(b)之區間長

第十五章　假說檢定
Testing Hypothesis

§15—1　導論

本章將討論以另一種方法來解決有關對一隨機樣本之未知參數與機率分配關係作一陳述的問題。在此我們將尋找一假定值然後利用樣本以肯定或否定這假定值以取代前述的參數估計值，而往往我們將發現此甚爲方便。本章將討論此種觀念，而且此觀念有很完整的理論基礎。然而在此我們不擬以很正式的觀點來探討此主題。

考慮下述例子

【例題15—1】有一生產剪刀門栓的工廠，其產品被應用於某一應力狀況，發現其壽命長（小時）爲N（100，9）的常態分配，今欲引進一新的生產技術以延長此門栓的壽命長。亦卽，我們希望新產品的壽命長X爲N（μ，9）的分配，其中$\mu>100$。（我們假定變異數相同表示新製造程序的變異性與舊程序相同。）

因此製造廠商與內行採購者必有興趣於作如下的假設檢定

$$H_0:\mu=100 \quad 對 \quad H:\mu>100$$

H_0 稱爲虛無假說（Null hypothesis），H_1 稱爲對之假說（Atornatvie hypothesis）。

在此我們面臨一個與第14章所討論的類似問題，那時我們研究一個隨機變數，但確不知道與此分配有關的參數值。我們仍可和以前一樣只以估計的μ值來解決此問題。然而，在很多情況我們確實對做此特殊決策感到興趣，卽我們應接受或棄却H_0呢？因此我們將不再只限於如先前的處理估計的概念，而着手去推展一些可以解決這些特殊問題的概念。

開始時，我們要獲取隨機變數X的樣本X_1，X_2……X_n，亦卽我們隨機由新製成的門栓中抽取n個並記錄其各個的壽命長X_1……X_n。然後計算其樣本平均數$\overline{X}$，因爲已知$\overline{X}$爲μ“良好”的估計值，因此依據$\overline{X}$的值來決定接受或棄却H_0似乎很合理。因爲我們關心於區別$\mu=100$與$\mu>100$，所以若（$\overline{X}-100$）“太大”則我們就可合理的棄却H_0。

於是我們被直覺的引導到下列步驟，通常我們稱之爲假設檢定：若$\overline{X}-100>C'$則棄却H_0，或是說若$\overline{X}>C$則棄却H_0。否則我們就接受H_0。

注意我們在對立假說H_1曾經部份提及檢定的特殊形式，而這點我們將再次的述及。若上述我們所關心情況以H_0：$\mu=100$對H_1'：$\mu\neq100$來檢定，我們習慣上的檢定爲：若$|\overline{X}-100|>C'$則棄却H_0。現在我們猶如先前當建立起θ估計值$\hat{\theta}$時的處境，我們將自問：這個估計值“好”嗎？它有何性質？同理我們對目前的檢定亦可自問：這個檢定“好”嗎？其有何性質？我們如何將其與其他的檢定來個比較呢？

為了回答這些問題，通常我們首先應體認這些答案不存在。亦即當我們僅觀測一些製造出來的門栓是無法確定 $\mu = 100$ 的，同樣道理：一個檢定並無法永遠得到正確的決策，可是"良好"的檢定在"多數情況"可得出正確的決策來。

更明確地說，當我們下決策時基本上將會有兩種類型誤差產生：我們可能將 H_0 為眞確時而將 H_0 棄却，亦即如門栓的品質並未改善，而這情形實在很可能發生，因為說不定碰巧我們抽出的是一些少數較具強度的門栓而非典型的門栓。另一種誤差是當 H_0 為不眞的時候却接受 H_0，亦即產品的品質確已改善。我們正式做如下的定義。

【定義】 型Ⅰ誤差：當 H_0 為眞時棄却 H_0

型Ⅱ誤差：當 H_0 為假時接受 H_0

很顯然我們無法完全避免這些誤差，我們將嘗試去使犯這種誤差的機率相對的降低。

為了掌握住本問題，我們將介紹一個非常重要的觀念，即有關檢定的 OC 函數（operating characteristic function）L，此函數為未知數 μ 的函數。

【定義】 上述檢定的 OC 函數被檢定義為

$$L(\mu) = p\,(\text{接受}H_0 \mid \mu) = p\,(\overline{X} \leq c \mid \mu)$$

亦即 $L(\mu)$ 為接受 H_0 的機率且被視為 μ 的函數。

【註】 另一與 OC 函數有很密切關係的函數為檢力函數（power function），定義為

$$H(\mu) = P\,(\text{棄却}H_0 \mid \mu)$$

因此 $H(\mu) = 1 - L(\mu)$，我們將利用 OC 函數來描述檢定的性質，雖然它亦可以檢力函數為之。

在考慮過的特殊情況裡，我們可獲得 L 明確的表示式：若 μ 為 $E(X)$ 的眞確值，則 $\overline{X}$ 有 $N(\mu, \frac{\sigma}{n})$ 的分配，因此

$$L(\mu) = P\,(\overline{X} \leq c \mid \mu) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \frac{C-\mu}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= \Phi\left[\frac{(C-\mu)\sqrt{n}}{3}\right]$$

其中 Φ 如往常一樣為

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$L(\mu)$ 的性質如下：

(a) $L(-\infty) = 1$　　(b) $L(+\infty) = 0$

(c) $\frac{dL}{d\mu} < 0$，對所有 μ 而言，（因此 L 為 μ 嚴格遞減函數）。

因此L的函數圖形通常如圖15－1所示（其形狀當然決定於常數C與樣本大小n的選擇）。

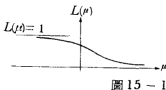


圖15－1

考慮$1-L(100)$，此數代表當H_0爲眞時而棄却H_0的機率。亦即，$1-L(100)$代表型Ⅰ誤差的機率。若C與n爲已知則$1-L(100)$已完全被決定。例如若$n=50$，且$C=101$，則我們得

$$1-L(100)=1-\Phi\left(\frac{101-100}{3}\sqrt{50}\right)$$

$$=1-\Phi(2.37)=0.009$$

於是這個特例的檢定特約有0.9％的時候引導我們錯誤地去棄却H_0。

我們時常會由稍微不同的觀點去考慮問題，假設有一樣本大小爲已知且其型Ⅰ誤差的機率爲特定，亦即$1-L(100)=\alpha$或$L(100)=1-\alpha$，則其C值爲何？

特別是若我們取$n=50$，$\alpha=0.05$則我們可由下列方程式獲得C值的解

$$0.95=\Phi\left(\frac{C-100}{3}\sqrt{50}\right)$$

由常態分配表知

$$1.64=\frac{C-100}{3}\sqrt{50}$$

因此 $$C=100+\frac{3(1.64)}{\sqrt{50}}=100.69$$

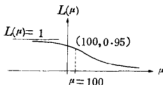


圖15－2

由此，每當樣本平均數大於100.69則我們棄却了這個假說，那保證我們將有0.05的機率發生型Ⅰ誤差。因爲n和C爲已知數，所以OC函數就完全被限定了，其圖形如圖15－2。數值0.05稱爲此檢定的顯著水準（significance level），在大多數的問題裡我們將此數值取小於0.1。

注意若我們已指定了α和樣本的大小n，則爲了完整的說明此檢定，只有C值有待決定。而爲了決定C值所以我們必須堅持OC函數圖形通過特定點（100，0.95）。（若顯著水準不爲0.05則應如何修正上面的步驟已甚清楚。）

既然OC函數已完全被限定因此我們即可求座標軸上的其他點。例如，$L(102)$的值爲何？

$$L(102)=\Phi\left(\frac{100.69-102}{3}\sqrt{50}\right)$$

$$=\Phi(-3.1)=0.00097$$

由此考慮這個檢定，知道當事實上$\mu=102$而我們接受H_0：$\mu=100$的機

率爲0.00097。因此如果$\mu = 102$而發生型Ⅱ誤差的機率是非常的小。因L是μ的遞減函數，所以對所有$\mu > 102$，$L(\mu) < 0.00097$。

若我們想要選取n和C則我們必須指定OC函數圖形通過的兩點，這樣我們才能不僅控制Ⅰ誤差也能控制型Ⅱ誤差的機率。

假設在我們考慮的這例子裡，希望能避免當$\mu \geq 102$時棄却H_0，則我們可令$L(102) = 0.01$，而由於L爲μ的遞減函數。因此對$\mu > 102$而言將有$L(\mu) \leq 0.01$（見圖15－3）。若我們亦要求顯著水準等於0.05，則我們可由獲得的下述兩方程式去決定n和C值：

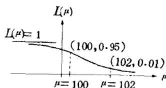


圖15－3

$$L(100) = 0.95 \qquad L(102) = 0.01$$

這些方程式變爲

$$0.95 = \Phi\left(\frac{C-100}{2}\sqrt{n}\right), \quad 0.01 = \Phi\left(\frac{C-102}{3}\sqrt{n}\right)$$

由常態分配表我們發現這兩個方程式的表示相當於

$$1.64 = \frac{C-100}{3}\sqrt{n}, \quad -2.33 = \frac{C-102}{3}\sqrt{n}$$

爲了消去n，我們將此兩方程式相除，得

$$(C-102)(1.64) = (-2.33)(C-100)$$

由此我們解得

$$C = \frac{(102)(1.64)-(100)(-2.33)}{1.64-(-2.33)} = 100.8$$

若當C爲已知，我們即可由上述兩任何一個平方式得

$$n = \left[\frac{3(1.64)}{C-100}\right]^2 = 34.6 \simeq 35$$

§15－2 一般形式：變異數爲已知的常態分配

我們已相當詳細地考慮過一個有關常態隨機變數平均數的例子，由於有些演算對我們仍很新鮮，因此我們將此例演繹如下：

假設X爲分配$N(\mu, \sigma^2)$的隨機變數，其中σ^2值假定爲已知。爲了檢定$H_0: \mu = \mu_0$對$H_1: \mu > \mu_0$我們有如下的提議：我們先獲取一個大小爲n的樣本，然後計算其樣本平均數$\overline{X}$，若$\overline{X} > C$則棄却H_0，其中C爲有待決定的常數。此檢定的OC函數爲

$$L(\mu) = P(\overline{X} \leq C) = \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

通常OC函數的圖形如圖15－4所示。

$L(\mu)$的一般性質爲（見習題15－4）。

(a) $L(-\infty)=1$。

(b) $L(+\infty)=0$

(c) $L'(\mu)<0$。因此L爲μ的嚴格遞減函數。

(d)當$\mu=C$時$L''(\mu)=0$，且在$\mu=C$點處圖形爲反曲點。

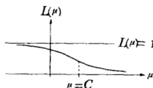


圖15－4

(e) n值增加將使曲線變得更陡。

爲了更進一步的討論，我們必須考慮兩種情況：

情況Ⅰ：若已知n且檢定的顯著水準指定爲α值，則由下述方程式可解得C值

$$1-\alpha=\Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

以關係式$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{K_\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\alpha$來定義$K_\alpha$，我們可將上述寫爲

$$K_{1-\alpha}=\frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

其中$K_{1-\alpha}$可由常態分配表獲得。因此若

$$\overline{X}>\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}K_{1-\alpha}$$

則我們棄却H_0

情況Ⅱ：若n和C均有待決定，則我們必須在OC曲線圖上指定兩點：顯著水準$1-L(\mu_0)=\alpha$與當$\mu=\mu_1$時型Ⅱ誤差的機率$L(\mu_1)=\beta$，於是我們必須如下方程式以便決定n和c：

$$1-\alpha=\Phi\left(\frac{C-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\;;\quad\beta=\Phi\left(\frac{C-\mu_1}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

如前所述解這些方程式可獲得

$$c=\frac{\mu_1K_{1-\alpha}-\mu_0K_\beta}{K_{1-\alpha}-K_\beta}\qquad n=\left[\frac{\sigma K_{1-\alpha}}{C-\mu_0}\right]^2$$

其中$K_{1-\alpha}$與K_β均已於以前定義過。

在檢定的步驟大要上，我們處理過的對立假說都是H_1：$\mu>100$（通常情況爲$\mu>\mu_0$），但有些時候我們可能希望考慮H_0：$\mu=\mu_0$對H_1'：$\mu<U_0$或者是H_0：$\mu=\mu_0$對H_1''：$\mu\neq\mu_0$而爲何我們要將上述檢定修訂成如此形式的對立假說，其理由是非常明顯的。假如我們考慮H_1'：$\mu<\mu_0$。若$\overline{X}<C$則我們將棄却H_0如此OC函數將被定義爲

$$L(\mu)=p\left(\overline{X}\geq C\right)=1-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

若我們考慮H_1''：$\mu \neq \mu_o$，而每當$|\overline{X}-\mu_o|>C$則我們棄却H_o，如此oc函數將被定義爲

$$L(\mu)=P(|\overline{X}-\mu_o|\leq C)$$
$$=\Phi(\frac{C+\mu_o-\mu}{\sigma}\sqrt{n})-\Phi(\frac{-C+\mu_o-\mu}{\sigma}\sqrt{n})$$

如果上面每個檢定的顯著水準α均選擇相同，而在同一座標系統內我們分別描出其OC函數圖形，可得如下圖形：（A對應於H_1，B對應於H_1'而C對應於H_1''）。

圖15－5 提供我們一條用來比較上述三種檢定的路徑。所有的檢定均有相同的顯著水準（很清楚在各種情況下，C均只是代表一個普通的常數符號而已，其要點是在各種情況下選擇C值以便使檢定具有相同的顯著水準α。）

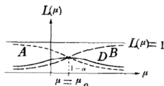
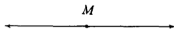


圖15－5

若$\mu>\mu_o$，則檢定A要比其他兩種檢定好，因爲它的型Ⅱ誤差值較小。然而若$\mu<\mu_o$則檢定A是三者最差的，檢定B則最佳。最後，檢定D通常是可接受的，且在任何特定的情況下，它可利用A或B來加以改善。因此我們必須注意在心裡存有一種特定的對立假說是相當重要的，因爲我們所選擇的檢定要依賴它。（我們只比較具有相同顯著水準的檢定：不過這並不是絕對需要，但是如果顯著水準不一樣時，要比較各種檢定就顯得很模糊。類似於我們在比較某一估計值時：我們只比較那些變異數具有不偏性的估計值。）

通常我們應該考慮那一種對立假說是相當明顯的，例如上例，我們大致上知道新的製造程序所生產門栓的堅牢性將大於或等於原來的。因此我們該利用檢定A。（如果新的程序劣於原來的，則我們的檢定將會很差），如果毫無這種假定可依據，那我們最好選擇D的檢定：若$|\overline{X}|>C$則棄却H_0。A和B稱爲單尾檢定（one-tailed test）而D則稱爲雙尾檢定（two-tailed test）。

在考慮對立假說時，我們會下面類似的情形將很有用，假定有一個人在M點迷失了，且我們知道這個人不是由M向右就是向左的一條直線上走。若有10個人組成一搜索隊，問這些人應如何分開？如果對此人的去向一無所知，則每個方



向分派五人是很合理的，因爲這樣剛好平均的分散力量。但如果有某些徵象顯示此人向左走，則應盡可能分派主要人力向左走。也就是說其他方面的考慮亦會影響可用資源的運用。譬如說，假定向左的路徑是平坦的鄉村道路，而向右則是深谷山林，那很顯然的大部份的人力應集中向右，因爲此人往右迷失的可能性較左

方的大。

類似之處是很顯然的。在檢定假說時，我們必然太過份關心決定的結果是棄却H_0或接受H_0。譬如我們下決策接受某些門栓而其實在爲較劣門栓時所犯的錯誤（因相信它們不差）與不接受那些實際上較好的門栓（相信它們不是）所犯的錯誤是一樣重要的。

【註】　上面我們所提的方式，通常我們均已預先選好檢定的顯著水準。然而對此種問題亦有其他常用的方法，我們也會談論到的。

讓我們回到例 15－1，那時我們檢定H_0：$\mu = 100$ 對H_1：$\mu > 100$，假定我們只獲一大小爲50的樣本，計算其樣本平均數$\overline{X}$，發現$\overline{X} = 100.87$，我們該接受或棄却H_0呢？我們探討如下：若$\mu = 100$，則$\overline{X}$有$N(100, \frac{9}{50})$的分配，由此我們計算

$$P(\overline{X} \geq 100.87) = P(\frac{\overline{X} - 100}{3}\sqrt{50} \geq \frac{100.87 - 100}{3}\sqrt{50})$$

$$= 1 - \Phi(2.06) = 0.019699$$

因爲$0.01 < 0.019699 < 0.05$，我很說$\overline{X}$的觀測值$\overline{X}$在5％顯著水準上，但不在1％顯著水準上，亦即若用$\alpha = 0.05$，我們將棄却H_0，但若我們用$\alpha = 0.01$，則並不棄却H_0。

換句話說，若$\mu = 100$，我們將獲得一個結果，而這個結果却只有1.9%的可能發生，如果我們覺得爲了接受H_0，一個結果必須至少有0.05發生的機率，則我們棄却它。若我們覺得只要有0.01的機率就夠了，那我們就接受它。

【註】　上述檢定規定當$\overline{X} > C$時H_0應被棄却，假定樣本大小$n = 2$，由於上述準則變爲$\frac{(X_1 + X_2)}{2} > C$或$(X_1 + X_2) > K$，因此樣本可能值$(x_1, x_2)$的集合被分成兩個區域：

$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 > k\} \text{ 與 } \overline{R}$$

特定區R當然決定於K值，也就是決定於檢定的顯著水準。棄却區域R有時亦被稱爲檢定的臨界區域（critical region）（見圖15－6）

通常，一個檢定可由臨界區域R來加以描述，亦即，若且唯若$(x_1, \cdots\cdots x_n) \in R$則棄却$H_0$。

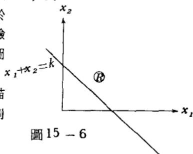


圖15－6

§15－3　他例　(Additional Examples)

在此我們不想闡述檢定假說的一般理論（此確實存在而且相當廣濶），而僅以考慮一些例子來代替。每個情況裡，我們所提出的檢定將直覺的引起興趣。我

們並不打算指出那一個檢定在某方面最好。

【例題15－2】 比較兩種製造過程，過程A的產品可由分配爲$N(\mu_x, \sigma_x^2)$的隨機變數X來加以描述，B產品則由分配爲$N(\mu_y, \sigma_y^2)$的隨機變數Y來加以描述。我們假定每一過程本身的變異性可由變異數來加以測定，而且假設爲已知。我們要檢定假說H_0：$\mu_x=\mu_y$ 對$\mu_x-\mu_y>0$。

我們由X獲取一大小爲n的樣本$X_1, X_2 \cdots\cdots X_n$，且由$Y$獲取大小爲$m$的樣本$Y_1 \cdots\cdots Y_m$。然後分別計算其$\overline{X}$與$\overline{Y}$，且提出下述的檢定以檢定上面的假說

若$\overline{X}-\overline{Y}>C$則棄却$H_0$，其中$C$爲一經過選擇以便使顯著水準等於$\alpha$的常數。

隨機變數$Z=\left[\left(\dfrac{\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_y^2}{m}}}\right]$ 有$N(0,1)$的分配，定義$\mu=\mu_x-\mu_y$，我們可將上述檢定的OC函數以μ的函數表示如下：

$$L(\mu)=P(\overline{X}-\overline{Y}\leq C \mid \mu)$$

$$=(Z\leq\frac{C-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_n^2}{m}}})=\Phi(\frac{C-\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_n^2}{m}}})$$

現在$\mu_x=\mu_y$相當於$\mu=0$，所以我們必須解方程式以便決定C，

$$L(0)=1-\alpha$$

或

$$1-\alpha=\Phi(\frac{C}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_y^2}{m}}})$$

因此

$$K_{1-\alpha}=\frac{C}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n}+\dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$$

其中K_α如前面所定義的$\alpha=(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}})\int_{-\infty}^{K_\alpha}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，所以

$$C=K_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}$$

（我們不想探討如何最佳的決定n和m這方面的問題，這問題的討論請參閱Deman and Klein, Probability and statistical Inference for fngineers. oxford university press, New York 1959）。

【例題15－3】有一製造廠供應的保險絲大約90％是良品，有一新的製造過程希望提高良品的比例，因此我們希望檢定假說H_0：$P=0.90$ 對H_1：$P>0.90$，其中P爲保險絲是良品的比率。（我們由新的產品中抽取50個保險絲樣

本，並點算其爲良品的數目X。我們提出下列檢定

當$X > 48$棄却H_o，否則接受H_o

假說隨機變數X有一參數爲P的二項分配（如果樣本由相當大的母體抽取者，則此假設很合實際。）我們可得OC函數如下的表示

$$L(P) = P(X \le 48) = 1 - P(X \ge 49)$$
$$= 1 - \sum_{k=49}^{50} \binom{50}{k} P^k (1-P)^{50-k}$$
$$= 1 - P^{49}(50 - 49P)$$

經過某些代數的簡化，我們得到如下：

(a) $L(0) = 1$　　(c)對所有p，$0 < p < 1$而言$L'(p) < 0$

(b) $L(1) = 0$　　(d)若$p = \frac{48}{49}$則$L''(p) = 0$

〔(c)與(d)的證明可直接由微分求得〕由於上述函數L的圖形如圖15－7曲線的形狀，此檢定的顯著水準α可由計算$1 - L(0.9)$得。

$$\alpha = 1 - L(0.9)$$
$$= (0.9)^{49}〔50 - 44.1〕$$
$$= 0.034$$

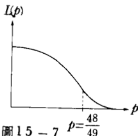


圖15－7

【註】(a)上面例子可推廣如下：

依據n次重複試驗後假設X爲參數p之二項分配的隨機變數。爲檢定假說H_o：$p = p_o$，對H_1：$p > p_o$我們提出下述檢定。

當$x > c$則棄却H_o其中C爲一待定常數（因此當$x \le C$則接受H_o）。

這檢定OC函數的形式爲

$$L(P) = \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

L函數的下列性質很輕易可得到證明（見習題15－5）。

①$L(0) = 1$　；　$L(1) = 0$

②對所有P，$0 < P < 1$而言，$L'(P) < 0$（因此L爲嚴格遞減函數）。

③若$P = \frac{C}{(n-1)}$則$L''(P) = 0$〔因此L在$\frac{C}{(n-1)}$爲反曲點〕。

(b)我們已經說過在某些情況下，可以poisson分配來近似估計二項分

配　亦即，對於當n很大而P很小時。

$P(X=k)\simeq\frac{e^{-np}(np)^k}{k!}$利用這種形式，我們發現上面所提出檢的$OC$函數變爲

$$R(P)=\sum_{k=0}^{c}\frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \qquad (15-3)$$

下列R的性質也可輕易得到證明（見習題15－6）。

④$R(0)=1$　；　$R(1)=0$

⑤對所有p，$0<p<1$而言，$R'(P)<0$。

⑥若$P=\frac{C}{n}$則$R''(P)=0$

⑦$P(\frac{C}{n})$只是C的函數而非n的函數。

讓我們再考慮檢定H_0：$\mu=\mu_0$對H_1：$\mu>\mu_0$其中X有$N(\mu,\sigma^2)$的分配，而以前我們假定σ^2爲已知，可是在此我們不作這項假定。

我們以前檢定時，每當$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}>C$，則棄却$H_0$；此處$C$可由若$\mu=\mu_0$則$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$有$N(0,1)$分配的這項事實來加以決定。

正當我們不知σ^2值而想求μ的信賴區間時，我們可以$\hat{\sigma}=[\frac{1}{(n-1)}]\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$來估計$\sigma^2$。而現在我們亦可利用類似上面的方法檢定：當$(\overline{X}-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}>C$時，棄却$H_0$，在決定$C$值時，若$\mu=\mu_0$我們可利用$\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}$有$(n-1)$個自由度的Student's t分配這種事實來加以決定（見定理14－3）。

今顯著水準α爲預先選定者，則$\alpha=P[\frac{(\overline{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}>C]$將蘊含著$C=t_{n-1,1-\alpha}$，此值可由Student's t－分配表查得（見圖15－8）於是我們的檢定變成：每當$\overline{X}>\hat{\sigma}\,t_{n-1,1-\alpha}\,n^{-\frac{1}{2}}+\mu_0$則棄却$H_0$。

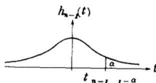


圖15－8

【例題15－4】假設X爲某一地區的年降雨量，其有$E(X)=30$（吋）的常態分配（此值可由很長的氣象資料獲得）最近幾年，由於某些氣候的變化似乎已很明顯的影響到年雨量。假設事實上年雨量已經增加，我們必須加以檢定：H_0：$\mu=30.0$對H_1：$\mu>30.0$變異

數假定未知，因爲氣候的變化可能亦導致降雨量的變異性，所以以前有關數據的變異數將不再有意義。

假定過去8年有產生如下的年雨量（吋）。

34.1　33.7　27.4　31.1　30.9　35.2　28.4　32.1

直接計算出$\overline{X}=31.6$與$\hat{\sigma}^2=7.5$，由t一分配表上查得

$$t_{7,0.95}=1.89$$

由於
$$\frac{\hat{\sigma}\, t_{7,0.95}}{\sqrt{8}}+30.0=31.8>31.6$$

因此在0.05顯著水準上我們並不棄却H_0。

§15－4　配合度的檢定 (Goodness of fit Tests)

大部份我們所討論的，均假定其隨機變數已有特定的分配，在上一章與本章之前幾節，我們已經學習到如何去解決與機率分配有關之未知參數的問題，然而，很可能我們連其最基本分配的通式都無法確定呢！讓我們來考慮一些例子。

【例題15－5】 某類型的商船在航行中須要冒惡劣氣候，結冰、水災、擱淺、機件失靈等意外危險，若在400天航行中，每艘船發生意外的次數X可視爲隨機變數，根據記載有如下數據。

意外次數(X)	0	1	2	3	4	5	6
發生X次意外的船數	1448	805	206	34	4	2	1

問上述這些數據可否證實X有poisson分配？

【例題15－6】 假設抽取某一型式的電線20條，並測定其電阻（歐姆）分別爲

9.8　14.5　13.7　7.6　10.5　9.3　11.1　10.1　12.7　9.9

10.4　8.3　11.5　10.0　9.1　13.8　12.9　10.6　8.9　9.5

如果R爲上面獲得樣本的隨機變數，試問我們能證實R爲常態分配嗎？

【例題15－7】 有20支電子管接受試驗，其壽命分別爲

7.2　37.8　49.6　21.4　67.2　41.1　3.8　8.1　23.2　72.1

11.4　17.5　29.8　57.8　84.6　12.8　2.9　42.7　7.4　33.4

假設T爲上面樣本的隨機變數，試問上面的數據能同意T有指數分配嗎？

上面這幾個例子，可以說是統計學廣泛被應用上時常會碰到的典型問題。有數種統計的技巧可用以有效的分析這些問題，下面我們將考慮其中一種。

檢定一隨機變數有某特定分配的假說，這方面的問題，可視爲下列幾個普遍問題的特例。

再考慮一下產生多項分配（multinomial distribution）的情況。試驗ε被重複做n次，每次重複ε均有且僅有一次事件A_i，$i=1$，2……k的發生。假設$P(A_i)=P_i$，令n_i爲在n次重複試驗ε中A_i發生之次數，$n_1+\cdots$

$\cdots n_k = n$。

我們要檢定假說H_0：$P_i = P_{i0}$，$i = 1$，……k 其中P_{i0}為一特定值。對此假說的檢定，Karl Pearson（1900）介紹了下面"配合度"的檢定。

當 $$D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} > C \text{ 則棄却} H_0 \quad (15-4)$$

其中C為一待定常數。

【註】因因為如果$p_i = p_{i0}$，則$E(n_i) = np_{i0}$，所以上述檢定準則在直覺上將引起相當的興趣，因為它要求每當觀測值n_i與期望值np_{i0}間的差異（discrepacy）"太大"時則我們棄却H_0。上面統計量D^2有時被寫為$D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$其中$o_i$與$e_i$分別表$n_i$的觀測值與期望值。

(b)D^2是一個統計量（亦即是觀測值n_1……n_k的一個函數），所以是一個隨機變數。對這一點的了解是相當重要的。事實上D^2是一個離散隨機變數，即使可假設很大但仍是有限個數值。D^2的分配非常複雜。好在若n很大時，可有效的近似估計D^2分配，而使得上述所提的方法變得非常有用。

【定理15－1】若n足夠大，且若$p_i = p_{i0}$則D^2有近似於自由度為$n-1$的chi-squre分配。

【證明】下面並不是很嚴密的證明，它僅欲尋求一個似很合理的結果而已。

考慮$k = 2$的情況，則

$$D^2 = \frac{(n_1 - np_{10})^2}{np_{10}} + \frac{(n_2 - np_{20})^2}{np_{20}}$$

利用$n_1 + n_2 = n$與$p_{10} + p_{20} = 1$，我們知

$$D^2 = \frac{(n_1 - np_{10})^2}{np_{10}} + \frac{(n - n_1 - n(1 - p_{10}))^2}{np_{20}}$$

$$= \frac{(n_1 - np_{10})^2}{np_{10}} + \frac{(n_1 - np_{10})^2}{np_{20}}$$

$$= (n_1 - np_{10})^2 \left[\frac{1}{np_{10}} + \frac{1}{np_{20}}\right]$$

$$= (n_1 - np_{10})^2 \left[\frac{np_{20} + np_{10}}{n^2 p_{10} p_{20}}\right]$$

$$= \frac{(n_1 - n_1 p_{10})^2}{np_{10}(1 - p_{10})}$$

現在$n_1 = \sum_{j=1}^{n} Y_j$，其中

$$Y_{ij} = 1 \quad \text{若在第 } j \text{ 次重複時發生 } A_i \text{ 事件}$$
$$= 0 \quad \text{其他}$$

於是 n_i 可以 n 個獨立隨機變數和表之，且由中央極限定理知若 n 很大則其將有近似於常態的分配。若 p_i 的眞確值爲 p_{i0}，則 $E(n_i) = np_{i0}$，與 $V(n_i) = np_{i0}(1 - p_{i0})$。因此若 $p_i = p_{i0}$ 且 n 很大時則隨機變數 $\dfrac{(n_i - np_{i0})}{\sqrt{np_{i0}(1-p_o)}}$ 有近似於 $N(0,1)$ 的分配。因此，對夠大的 n，依據定理 10 − 8，隨機變數

$$\left[\frac{n_i - np_{i0}}{\sqrt{np_{i0}(1-p_{i0})}}\right]^2$$

有近似於 χ^2_1 的分配。

我們已證明如果 n 足夠大，D^2（當 $k = 2$）有近似於 χ^2_1 的分配，這已合乎定理的要求。對於一般 k，證明的程序相同：我們必須證明，若 n 很大且 $p_i = p_{i0}$，且由定理 10 − 8 我們發現 D^2 可表爲（$k-1$）個分配爲 $N(0,1)$ 之獨立隨機變數的平方和。

我們可應用上面的結果去回答爲了棄却假說 H_0 ：$p_i = p_{i0}$，D^2 應該要"多大"的問題。

假定我們要求犯型 I 誤差的機率（亦即顯著水準）等於 0.05 。也就是說當 H_0 爲眞時，我們希望大約 5 %的時候會棄却 H_0，由此我們選取滿足的 C

$$P(D^2 > C \mid P_i = P_{i0}) = 0.05$$

因爲若 $P_i = P_{i0}$，則 D^2 有 χ^2_{k-1} 的分配，所以我們可由 chi-square 分配表上獲得 C 值。亦即 $C = X^2_{k-1, 0.95}$；此 $\chi^2_{k-1, 0.95}$ 被如下關係式所定義

$$\int_{x^2_{k-1,0.95}}^{\infty} g_{k-1}(x)\, dx = 0.05$$

其中 $g_{k-1}(x)$ 爲有 χ^2_{k-1} 分配之隨機變數的 pdf。（見圖 15 − 9）

我們要利用上面推演出的觀念來回答本節開始時所提的問題：我們如何去找出一個檢定，用以決定接受或棄却一個樣本取自具有特定分配之隨機變數的假說？

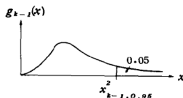


圖 15 − 9

關於這點，我們將此兩種類型的問題彼此之間作個區別。我們可能只假定此隨機變數的抽樣取自常態分配，而並沒有指定其有關的參數值。或者我們可能更進一步除了假定考慮的隨機變數具有常態分配外還有限定的平均數與變異數。雖然這兩類問題的處理

方法相同，但後者則稍微簡單，因此我們由後者開始討論。

情況Ⅰ：分配已完全限定的檢定。

【例題15－8】假設我們相信燈泡的壽命長T具有參數$\beta=0.005$的指數分配，（亦即失效時間的期望值為200小時），今抽取一個150燈泡的樣本，試驗並記錄其燒壞的時間$T_1 \cdots\cdots T_{150}$，考慮下列四個互斥的事件

$$A_1 : 0 \le T \le 100 \quad ; \quad A_2 : 100 \le T < 200$$
$$A_3 : 200 \le T < 300 \quad ; \quad A_4 : T \ge 300$$

假定我們所記錄事件A_i發生的數目n_i，其結果如下：$n_1=47$，$n_2=40$，$n_3=35$且$n_4=28$，為了計算統計量D^2我們必先計算P_i，$i=1$，2，3，4現在

$$P_1 = P(T \le 100) = 1 - e^{-0.005(100)} = 1 - e^{-0.5} = 0.39$$
$$P_2 = P(100 \le T < 200) = 1 - e^{-0.005(200)} - 0.39 = 0.24$$
$$P_3 = P(200 \le T < 300) = 1 - e^{-0.005(300)} - [1 - e^{-0.005(200)}] = 0.15$$
$$P_4 = P(T > 300) = e^{-0.005(300)} = 0.22$$

現在我們計算

$$D^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$$
$$= \frac{(47-58.5)^2}{58.5} + \frac{(40-36)^2}{36} + \frac{(35-22.5)^2}{22.5} + \frac{(28-33)^2}{33}$$
$$= 11.56$$

由 *chi-square* 分配表上我們發現$P(D^2 > 11.56) < 0.01$，其中D^2為近似於自由度為3的 *chi-square* 分配，因此我們棄却掉上面數據代表參數$\beta=0.005$指數分配之隨機變數樣本的假設。

上面例子是在描述當我們檢定$X_1 \cdots\cdots X_n$代表取自一具有完全特定分配之隨機變數的樣本時，這種假設檢定的一般步驟。

(a)將實數直線分成k段互斥的區間$A_1 \cdots\cdots A_k$。

(b)令n_i表樣本值落在區間A_i，$i=1$，$2 \cdots\cdots k$的個數。

(c)令$P_{i0}=P(A_i)$，因為假設此分配已完全被限定，所以這些值可計算出

(d)計算D^2，若$D^2 > C$則棄却此假設。其中C由 *chi-square* 分配表獲得，

若要求顯著水準為α則$C=\chi^2_{k-1,1-\alpha}$。

【註】我們不打算討論如何去選取上面區間A_i或應選取多少區間的問題，我們只敘述下列規則：對任何A_i而言，若$A_i < 5$則須與A_{i+1}或

A_{i-1} 的數據合併。亦即我們不要將隨機變數的樣本空間區分到期望的發生次數少於5的地步。(A readable discussion of this problem may be found in paper by W. G. Cahran, entitled "the X^2-Test of Goodness of Fit" appearing in Ann. Math. Stat. 23, 315-345(1952)].

情況Ⅱ:分配之參數尚待估計的檢定(Testing for a distribution if parameters must be estimated)

在許多問題裡,我們只能合理假設被抽樣的隨機變數具有某一類型的分配,而無法指定其參數值。譬如,我們由於某些假定可以導致poisson分配,或指數分配……等等。爲了引用上節所提的技巧,我們必須知道其分配的參數值。

如果我們不知道這些參數值,很顯然我們必先加以估計,然用利用這些估計值去計算機率P_i。但將導兩個問題:

(a)參數值應如何估計?

(b)如果在D^2中以估計值P_i取代P_{i0},對D^2分配將不知會有何影響?(若我們瞭解原來P_{i0}是常數而今P_i是隨機變數,由此將使隨機變數D^2的結構變成非常繁複,而且也不難體會出對D^2分配的影響)。

對上面問題的答案,在此我們將做些敍述(但不證明)。

(a)通常均以最概法(Maximum likehood method)來估計參數值。

(b)如果被估計的參數個數$\gamma < k$,而當n很大,則隨機變數D^2仍就有*chi-square*分配,其自由度爲$n-k-r$。

【註】 後者很值得加以注意,它意味著D^2仍如以前一樣具有χ^2一分配,唯一的差異是由於每個參數必須加以估計而失去一個自由度。

【例題15-9】考慮如例題14-6關於煤中含灰量的數據,假定我們想檢定這些數據取自一常態分配隨機變數的假說,首先我們必須估計有關的參數μ與σ^2,利用以前ML的方法得$\hat{\mu}=17.0$與$\hat{\sigma}^2=7.1$。我們將X的可能值分成下述五類:

$$A_1: X<12 \quad ; \quad A_2: 12<X<15$$
$$A_3: 15\le X<18 \quad ; \quad A_4: 18<X<21$$
$$A_5: X\ge 21$$

令n_i表A_i發生的次數,我們發現

$$n_1=7\ ;\ n_2=49\ ;\ n_3=109\ ;\ n_4=67\ ;\ n_5=18$$

其次我們以前面得到的估計值$\hat{\mu}$及$\hat{\sigma}^2$來計算$P_i=P(A_i)$得

$$P_1=P(X<12)=P\left(\frac{X-17}{2.7}<\frac{12-17}{2.7}\right)$$
$$=\Phi(-1.85)=0.03$$
$$P_2=P(12\le X<15)=\Phi(-0.74)-\Phi(-1.85)=0.20$$

$$P_3 = P(15 \leq X < 18) = \Phi(0.27) - \Phi(-0.74) = 0.41$$
$$P_4 = P(18 \leq X < 21) = \Phi(1.48) - \Phi(0.37) = 0.29$$
$$P_5 = P(X \geq 21) = 1 - \Phi(1.48) = 0.07$$

如此我們可計算

$$D^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - 250\widehat{P}_i)^2}{250\widehat{P}_i}$$
$$= \frac{(7-7.5)^2}{7.5} + \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(109-102.5)^2}{102.5}$$
$$+ \frac{(67-72.5)^2}{72.5} + \frac{(18-17.5)^2}{17.5}$$
$$= 0.82$$

因為D^2 有 $5-1-2=2$ 個自由度，我們由 chi-squar 分配表查得$P(D^2 \geq 0.82) \simeq 0.65$ 因此我們接受其為常態的假說。

【例題15－10】 讓我們考慮例題15－5 的數據，試問在400 天期間發生意外次數的隨機變數X為一 *poisson* 分配嗎？

首先我們估計此分配的參數入值，在第14 章中我們發現X的ML估計值已知為其樣本平均數。於是

$$\hat{\lambda} = \frac{0(1448)+1(805)+2(206)+3(34)+4(4)+5(2)+6(1)}{1448+805+206+34+4+2+1}$$
$$= \frac{1351}{2500} = 0.54$$

令$A_1: X=0$；$A_2: X=1$；$A_3: X=2$；$A_4: X=3$；$A_5: X \geq 4$；則$n_1 = 1448$，$n_2 = 805$；$n_3 = 206$；$n_4 = 34$；$n_5 = 7$；因此我們得

$$\widehat{P}_1 = P(X=0) = e^{-(0.54)} = 0.58 \quad 且\ np_1 = 1450$$
$$\widehat{P}_2 = P(X=1) = e^{-0.54}(0.543) = 0.31 \quad 且\ n\widehat{p}_2 = 775$$
$$\widehat{P}_3 = P(X=2) = e^{-0.54}\frac{(0.543)^2}{2} = 0.08 \quad 且\ n\widehat{p}_3 = 200$$
$$\widehat{P}_4 = P(X=3) = e^{-0.54}\frac{(0.543)^3}{5} = 0.08 \quad 且\ n\widehat{p}_4 = 25$$
$$\widehat{P}_5 = P(X \geq 4) = 1 - P(X<4) = 0.02 \quad 且\ n\widehat{p}_5 = 50$$

因此我們可計算

$$D^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - np_i)^2}{n\widehat{p}_i}$$
$$= \frac{(1448-1450)^2}{1450} + \frac{(805-775)^2}{775} + \frac{(206-200)^2}{200}$$

$$+\frac{(34-25)^2}{25}+\frac{(7-50)^2}{50}=42.2$$

因爲有5個分類而且我們估計一個參數值，因此D^2有近似於χ_3^2的分配。由*chi-square*分配表我們得$P(D^2\geq 42.2)\simeq 0$，因此我們棄却此假說。



15－1　假設X有分配$N(\mu，\sigma^2)$，其中σ^2已知。爲了檢定H_0：$\mu=\mu_0$對H_1：$\mu<\mu_0$，我們提出下面方法：抽取n個樣本，然後當$X<C$時否決H_0；這兒C尙待決定。

(a)利用已製成圖表的常態分配表示OC函數$L(\mu)$。

(b)假定$\sigma^2=4$且要檢定H_0：$\mu=30$對H_1：$\mu<30$，試決定爲了滿足$L(30)=0.98$，$L(27)=0.01$的n和C值。

(c)如果顯著水準$\alpha=0.01$，試求C的表示式。

(d)假定按們獲得下列樣本值

27.1　29.3　31.5　33.0　30.1　30.9　28.4

32.4　31.6　28.9　27.3　29.1

假如顯著水準$\alpha=0.05$，你將棄却(c)的假定嗎？

15－2　考慮習題15－1的情況，但對立假說爲H_1：$\mu\neq\mu_0$因此當$|\overline{X}-\mu_0|>C$時我們棄却H_0，試回答(a)和(b)的問題。

15－3　假設X有參數是λ的卜瓦松分配，爲了檢定H_0：$\lambda=\lambda_0$對H_1：$\lambda>\lambda_0$，我們提出下面的方法：抽取n個樣本，計算$\overline{X}$，然後當$\overline{X}>C$時否決H_0，這兒C是常數其值尙待決定。

(a)試求OC函數$L(\lambda)$〔Hint 利用卜瓦松分配的再生性質（Repuductive property）〕

(b)劃OC函數圖形。

(c)假設我們要檢定H_0：$\lambda=0.2$對H_1：$\lambda>0.2$且$n=10$。如果$X>0.25$，則我們否決H_0，問此檢定的顯著水準爲何？

15－4　試證（15－1）式。

15－5　試證（15－2）式。

15－6　試證（15－3）式。

15－7　已知一批伏特計中不良品的比例是p，爲了檢定H_0：$p=0.2$對H_1：$p>0.2$，我們利用下面的方法。抽取一組樣本其大小爲5，算算不良品件數X，如果$X\leq 1$則接受H_0；如果$X>4$則棄却H_0，且若$X=2，3，4$則再取一組樣本，令Y表第二組中不良品件數，如果$Y\geq 2$則棄却H_0，否則接受H_0（假設伏特計很多，因此X和Y可假

定爲獨立二項式隨機變數）。

(a)求此檢定的 OC 函數表示式且劃其圖形。

(b)試求此檢定的顯著水準。

(c)如果 $p=0.5$，則型Ⅱ誤差的機率爲何？

15－8　如果 $n=4$，$k=3$，則（15－4）式定義的 D^2 有多少個可能值？

(a)試求（15－4）式所定義的 D^2 的期望值。

(b)我們知道當 n 足夠大時 D^2 近乎有 *Chi-square* 分配，問(a)求得的值與由 *Chi-square* 分配求得的 D^2 之期望值比較時怎麼樣？

15－9　(a)試求（15－4）式所定義的 D^2 的期望值。

(b)我們知道當 n 足夠大時 D^2 近乎有 *Chi-square* 分配，問(a)求得的值與由 *Chi-square* 分配求得的 D^2 之期望值比較時怎麼樣？

15－10　一種新的製造過程可得三種潤滑劑（Lubricant），將潤滑劑在幾架機器上試驗，結果被分爲acceptable（可接受）或nonacceptable（不能接受），所得的數據如表15－1所示。試檢定每種潤滑劑導至可接受的結果的機率 p 均相同的假定，〔Hint 先由樣本估計 p 值〕。

表15－1

	潤滑劑Ⅰ	潤滑劑Ⅱ	潤滑劑Ⅲ
可接受	144	152	140
不能接受	56	48	60
總　共	200	200	200

15－11　假設335個燈泡被檢驗，它們的壽命（T）如下表所示

壽命（小時）	$0\leq T<100$	$100\leq T<200$	$200\leq T<300$	$300\leq T<400$	$T\geq 400$
燈泡個數	82	71	68	62	52

由實際的記錄我們算出樣本平均值等於123.5小時，根用此訊息檢定 T 是指數分配的假定。

15－12　假設 X 的 pdf 是

$$f(x)=\frac{\alpha\cos\alpha x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\alpha}\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}，0<\alpha<1$$

爲了檢定H_o：$\alpha=\alpha_o$我們提出下面的方法，觀察X得X_1，如果$X_1>1$則棄却H_o。

(a)試求此檢定的OC函數表示式且劃其圖形。

(b)如果$\alpha_o=\frac{\pi}{4}$，則顯著水準爲何？



15－1

【解】 (a) $L(\mu)=P(X\geq C\mid\mu)=1-\Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$

(b) $\Phi\left(\frac{C-\mu_o}{\sigma}\sqrt{n}\right)=0.01$ ， $\sqrt{n}\left(\frac{C-\mu_o}{\sigma}\right)=-2.33$

$C=\mu_o-2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(c) $L(30)=0.98$

$1-\Phi\left(\frac{C-30}{2}\sqrt{n}\right)=0.98$

$\frac{C-30}{2}\sqrt{n}=-2.05$ ……………………………①

$L(27)=0.01$

則 $\frac{C-27}{2}\sqrt{n}=2.33$ ……………………………②

解①②　　$C=28.6$　　　$n=9$

(d) $X=29.92$

$H=1-L(\mu)=\Phi\left(\frac{29.92-30}{2}\sqrt{12}\right)=\Phi(0.14)$

$=0.5557$

故H_o爲接受（$0.5557>0.05$）

15－2

【解】 (a) $L(\mu)=P(\mid X-\mu_o\mid\leq C\mid\mu_o)$

$=P(-C+\mu_o\leq X\leq C+\mu_o\mid\mu_o)$

$=\Phi\left(\frac{C-\mu+\mu_o}{\sigma}\sqrt{n}\right)-\Phi\left(\frac{-C+\mu_o-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right.$

(b) $1-L(\mu_o)=0.01$

$$\Phi\left(\frac{-C+\mu_o-\mu_o}{\sigma}\sqrt{n}\right)=0.005$$

$$\frac{-C}{\sigma}\sqrt{n}=-2.575 \quad , \quad C=\frac{2.575}{\sqrt{n}}\sigma$$

15－3

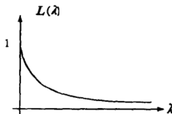
【解】 (a) $\overline{X}=n\lambda$

$$L(\lambda)=P(\overline{X}\leq C \mid \lambda)=P(n\overline{X}\leq nC \mid \lambda)$$

$$=\sum_{k=0}^{nc}\frac{(n\lambda)^k e^{-n\lambda}}{k!}$$

$[nC]=greatest\ integer\leq nC$

(b)



(c) $L(\lambda)=\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k e^{-2}}{k!}=e^{-2}(1+2+2)=0.681$

$\alpha=1-L(\lambda)=0.32$

15－4

【解】 (1) $L(-\infty)=\Phi\left[\frac{(C+\infty)\sqrt{n}}{\sigma}\right]=\Phi(\infty)=1$

(2) $L(\infty)=\Phi\left[\frac{(C-\infty)\sqrt{n}}{\sigma}\right]=\Phi(-\infty)=0$

(3) $L'(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(n(c-u)^2)}{\sigma^2}}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

$e^{-\frac{n(c-u)^2}{2\sigma^2}}\geq 0$ 故 $L'(\mu)\leq 0$

(4) $L''(\mu)=-\frac{}{\sigma^2}(C-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(n(c-u)^2}{\sigma^2}}$

$if\ L''(\mu)=0 \Rightarrow \mu=C$

(5) $n_1>n_2$ 且 $|\mu|<C$ 時

$|L'n_1(\mu)|>|L'n_2(\mu)|$ 故 *curve strrper*

15－5

【衣】 (1)顯然易證

(2) $L'(p)=\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k-np$

(a) $C\leq np \qquad k-np<0\Rightarrow L'(p)<0$

(b) $C<np$

$$L'(p)=\sum_{k=0}^{np}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(n-np)+\sum_{k=np+1}^{c}\binom{n}{k}$$

$$(1-p)^{n-k-1}p^{k-1}(k-np)$$

前者每項皆小於0，後者每項皆大於0

$$\frac{d}{dp}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=\frac{d}{dp}(1)=0$$

$$\therefore\sum_{k=0}^{np}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k-p)=$$

$$-\sum_{k=np+1}^{n}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k-np)$$

$$\left|\sum_{k=np+1}^{n}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k-p)\right|\geq$$

$$\left|\sum_{k=np+1}^{c}\binom{n}{k}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}(k-np)\right|$$

故 $L'(p)<0$

由(a)(b)知 $L'(p)<0 \qquad 0<p<1$

15－6

【解】 (1) $R(0)=1+\sum_{k=1}^{c}0=1$

$$R(1)=\sum_{k=0}^{c}\frac{e^{-n}n^{k}}{k!}=0 \qquad for \quad n\to\infty$$

(2) $R'(p)=\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!}[-ne^{-np}(np)^{k}+e^{-np}kn(np)^{k-1}]$

$$=\sum_{k=0}^{c}\frac{1}{k!}[e^{-np}n(np)^{k-1}(k-np)]$$

(a) $k<np \qquad R'(p)<0$

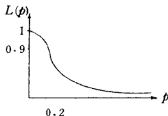
(b) $k\geq np$ 同上題證明法 $R'(p)<0$

15－7

【解】 (a) $L(p)=p(X\leq1 \text{ or } X=2,3,4$ 且 $Y\leq1)$

$$=p(X\leq1)+p(X=2,3,4,Y\leq1)$$

$$=[(1-p)^{5}+5(1-p)^{4}_{p}][1+\sum_{k=2}^{4}\binom{5}{k}(1-p)^{5-k}p^{k}]$$



(b) $L(0.2)=[(0.8)^5+5(0.8)^4(0.2)][1+\binom{5}{2}(0.8)^3(0.2)^2+\binom{5}{3}(0.8)^2(0.2)^3+\binom{5}{4}(0.8)(0.2)^4]$

$=0.91$

(c) $p=0.5$ type 2 error

$L(0.5)=6(\frac{1}{2})[1+25(\frac{1}{2})^5]$

$=0.1875(1+0.78125)=0.1875(1.78)$

$=0.344$

15－8

【解】

n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
4	0	0	1	0	3
0	4	0	0	1	3
0	0	4	2	2	0
3	1	0	2	0	2
3	0	1	2	1	1
1	3	0	0	2	2
0	3	1	1	2	1
故計15種			1	1	2

15－9

【解】 (a) $E(D_2)=\sum_{i=1}^{k}\frac{E(n_i^2)-2np_io E(n_i)+n^2p_io^2}{np_io}$

$E(n_i)=np_io$

$E(n_i^2)=V(n_i)+E(n_i)^2$

$=np_io(1-p_i^2o)+n^2p_io^2$

$=np_io-np_i^2o+n^2p_io^2$

$\therefore E(D^2)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n^2p_io^2+p_ion-n\,p_io^2-2n^2p_io^2+n^2p_io^2}{np_io}$

$$= \sum_{i=1}^{k} 1 - p_{i}o = k - \sum_{i=1}^{k} p_{i}o$$

$$= k - 1$$

(b) $n \to \infty$ 用卡方分配做近似

$E(D^2) = Degree \;\; of \;\; D^2 = k - 1$

by 卡方分配之性質。

15－10

【解】 $p_1 = 0.72$， $p_2 = 0.76$， $p_3 = 0.70$

$$p = \frac{0.72 + 0.76 + 0.70}{3} = 0.7267$$

$$D^2 = \frac{(144 - 145.34)^2}{145.34} + \frac{(152 - 145.34)^2}{145.34} + \frac{(140 - 145.34)^2}{145.34}$$

$= 0.514$

自由度 $3 - 1 - 1 = 0$

$X_{1, 0.95}^2 = 3.841$

因爲 $0.514 < 3.841$ 故接受 H_0

15－11

【解】 $D^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - np_io)^2}{np_io}$

$P_{10} = P(\, 0 \le T < 100 \,) = 1 - e^{-\frac{100}{123.5}} = 0.556$

$P_{20} = P(\, 100 \le T < 200 \,) = e^{\frac{-100}{123.5}} - e^{\frac{-200}{123.5}} = 0.247$

$P_{30} = P(\, 200 \le T < 300 \,) = e^{\frac{-200}{123.5}} - e^{\frac{-400}{123.5}} = 0.11$

$P_{40} = P(\, T00 \le T < 400 \,) = e^{\frac{-400}{123.5}} - e^{\frac{-400}{123.5}} = 0.049$

$P_{50} = P(\, T \ge 400 \,) = e^{\frac{-400}{123.5}} = 0.039$

$D^2 = 322.8$

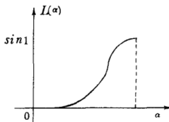
自由度 $5 - 1 - 1 = 3$

$P(\, D^2 \ge 322.8 \,) = 0$ 不可能故棄却 H_0

15－12

【解】 (a) $L(\alpha) = P(\, X_1 \le 1 \,)$

$$= \int_0^1 \frac{\alpha \cos \alpha x}{\sin(\frac{\pi}{2})\alpha} dx$$



$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})\alpha}\sin dx \Big|_0^{1} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$

(b) $$L(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin(\frac{\pi}{8})^2} = \frac{0.707}{\sin 1.25} = 0.74$$

15－13

【解】 $P_0 = p(X=0) = e^{-6.18} = 0.00208$

$(\alpha = E(X) = \overline{X} = 6.18)$

$\widehat{P_1} = p(X=1) = e^{-6.18}(6.18) = 0.81285$

$\widehat{P_2} = p(X=2) = e^{-6.18}\dfrac{(6.18)^2}{2!} = 0.0397$

$\widehat{P_3} = 0.0817$　　$\widehat{P_4} = 0.126$

$\widehat{P_5} = 0.156$　　$\widehat{P_6} = 0.161$

$\widehat{P_7} = 0.142$　　$\widehat{P_8} = 0.11$

$\widehat{P_9} = 0.0755$　　$\widehat{P_{10}} = 0.0467$

$\widehat{P_{11}} = 0.0262$　　$\widehat{P_{12}} = 0.0133$

$$D^2 = \sum_{i=0}^{12}\frac{(n_i - np_{i}o)^2}{np_{i}o} = 20.07$$

自由度 $13-1-1=11$

$P(D^2 \geq 20.07) = 0$　　故棄却H_o

附 錄

表1 標準常態分配函數值

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=P(Z\leq z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	000003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1073	0.1056	0.1088	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

**B.W. Lindgren, Statistical The Macmillan Company*, 1960.

表 1 （續上頁）

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du = P(Z\leq z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0 9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9867
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0 9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.000

表2 二項式分配函數

$$1-F(x-1)=\sum_{r=x}^{r=n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

$n=10$ $x=10$	$n=10$ $x=9$	$n=10$ $x=8$	$n=10$ $x=7$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.000000	.0000000	.0000000	.0000000	.02
.0090000	.0000000	.0000000	.0000000	.03
.0000000	.0000000	.0000000	.0000000	.04
.0000000	.0000000	.0000000	.0000001	.05
.0000000	.0000000	.0000000	.0000003	.06
.0000000	.0000000	.0000000	.0000008	.07
.0000000	.0000000	.0000001	.0000020	.08
.0000000	.0000000	.0000002	.0000045	.09
.0000000	.0000000	.0000004	.0000091	.10
.0000000	.0000000	.0000008	.0000173	.11
.0000000	.0000000	.0000015	.0000308	.12
.0000000	.0000001	.0000029	.0000525	.13
.0000000	.0000002	.0000051	.0000856	.14
.0000000	.0000003	.0000087	.0001346	.15
.0000000	.0000006	.0000142	.0002051	.16
.0000000	.0000010	.0000226	.0003042	.17
.0000000	.0000017	.0000350	.0004401	.18
.0000001	.0000027	.0000528	.0006229	.19
.0000001	.0000042	.0000779	.0008644	.20
.0000002	.0000064	.0001127	.0011783	.21
.0000003	.0000097	.0001599	.0015804	.22
.0000004	.0000143	.0002232	.0020885	.23
.0000006	.0000207	.0003068	.0027228	.24
.0000010	.0000296	.0004158	.0035057	.25
.0000014	.0000416	.0005362	.0044618	.26
.0000021	.0000577	.0007350	.0056181	.27
.0000030	.0000791	.0009605	.0070039	.28
.0000042	.0001072	.0012420	.0086507	.29
.0000059	.0001437	.0015904	.0105921	.30
.0000082	.0001906	.0020179	.0128637	.31
.0000113	.0002505	.0025384	.0155029	.32
.0000153	.0003263	.0031673	.0185489	.33
.0000206	.0004214	.0039219	.0220422	.34
.0000276	.0005399	.0048213	.0260243	.35
.0000366	.0006865	.0058864	.0305376	.36
.0000481	.0008668	.0071403	.0356252	.37
.0000628	.0010871	.0086079	.0413301	.38
.0000814	.0013546	.0103163	.0476949	.39
.0001049	.0016777	.0122946	.0547619	.40
.0001342	.0020658	.0145738	.0625719	.41
.0001708	.0025295	.0171871	.0711643	.42
.0002161	.0030809	.0201696	.0805763	.43
.0002720	.0037335	.0235583	.0908427	.44
.0003405	.0045022	.0273918	.1019949	.45
.0004242	.0054040	.0317105	.1140612	.46
.0005260	.0064574	.0365560	.1270655	.47
.0006493	.0076828	.0419713	.1410272	.48
.0007979	.0091028	.0480003	.1559607	.49
.0009766	.0107422	.0546875	.1718750	.50

表 2 （續上頁）

$$1-F(x-1)=\sum_{r=x}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$$

$n=10$ $x=6$	$n=10$ $x=5$	$n=10$ $x=4$	$n=10$ $x=3$	$n=10$ $x=2$	$n=10$ $x=1$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000020	0.0001138	0.0042662	0.0956179	0.01
.0000000	.0000007	.0000305	.0008639	.0161776	.1829272	.02
.0000001	.0000054	.0001471	.0027650	.0345066	.2625759	.03
.0000007	.0000218	.0004426	.0062137	.0581538	.3351674	.04
.0000028	.0000637	.0010285	.0115036	.0861384	.4012631	.05
.0000079	.0001517	.0020293	.0188378	.1175880	.4613849	.06
.0000193	.0003139	.0035761	.0283421	.1517299	.5160177	.07
.0000415	.0005857	.0058013	.0400754	.1878825	.5656115	.08
.0000810	.0010096	.0088338	.0540400	.2254471	.6105839	.09
.0001469	.0016349	.0127952	.0701908	.2639011	.6513216	.10
.0002507	.0025170	.0177972	.0884435	.3027908	.6881828	.11
.0004069	.0037161	.0239388	.1086818	.3417250	.7214990	.12
.0006332	.0052967	.0313048	.1307642	.3803692	.7515766	.13
.0009505	.0073263	.0399642	.1545298	.4184400	.7786984	.14
.0013832	.0098741	.0499698	.1798035	.4557002	.8031256	.15
.0019593	.0130101	.0613577	.2064005	.4919536	.8250988	.16
.0027098	.0168038	.0741472	.2341305	.5270412	.8448396	.17
.0036694	.0213229	.0883411	.2628010	.5608368	.8625520	.18
.0048757	.0266325	.1039261	.2922204	.5932435	.8784233	.19
.0063694	.0327935	.1208739	.3222005	.6241904	.8926258	.20
.0081935	.0398624	.1391418	.3525586	.6536289	.9053172	.21
.0103936	.0478897	.1586739	.3831197	.6815306	.9166422	.22
.0130167	.0569196	.1794024	.4137173	.7078843	.9267332	.23
.0161116	.0669890	.2012487	.4441949	.7326936	.9357111	.24
.0197277	.0781269	.2241249	.4744072	.7559748	.9436865	.25
.0239148	.0903542	.2479349	.5042200	.7777550	.9507601	.26
.0287224	.1036831	.2725761	.5335112	.7980705	.9570237	.27
.0341994	.1181171	.2979405	.5621710	.8169646	.9625609	.28
.0403932	.1336503	.3239164	.5901015	.8344869	.9674476	.29
.0473490	.1502683	.3503893	.6172172	.8506917	.9717525	.30
.0551097	.1679475	.3772433	.6434445	.8656366	.9755381	.31
.0637149	.1866554	.4043626	.6687212	.8793821	.9788608	.32
.0732005	.2063614	.4316320	.6929966	.8919901	.9817716	.33
.0835979	.2269866	.4589388	.7162304	.9035235	.9843166	.34
.0949341	.2485045	.4861730	.7383926	.9140456	.9865373	.35
.1072304	.2708415	.5132284	.7594627	.9236190	.9884708	.36
.1205026	.2939277	.5400038	.7794292	.9323056	.9901507	.37
.1347603	.3176870	.5664030	.7982887	.9401661	.9916070	.38
.1500068	.3420385	.5923361	.8160453	.9472594	.9928666	.39
.1662386	.3668967	.6177194	.8327102	.9536426	.9939534	.40
.1834452	.3921728	.6424762	.8483007	.9593705	.9948888	.41
.2016092	.4177749	.6665372	.8628393	.9644958	.9956920	.42
.2207058	.4436094	.6898401	.8763538	.9690684	.9963797	.43
.2407033	.4695813	.7123307	.8888757	.9731358	.9969669	.44
.2615627	.4955954	.7339621	.9004403	.9767429	.9974670	.45
.2832382	.5215571	.7546952	.9110859	.9799319	.9978917	.46
.3056772	.5473730	.7744985	.9208530	.9827422	.9982511	.47
.3288205	.5729517	.7933480	.9297839	.9852109	.9985544	.48
.3526028	.5982047	.8112268	.9379222	.9873722	.9988096	.49
.3769531	.6230469	.8281250	.9453125	.9892578	.9990234	.50

表3 卜氏分配函數

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=\infty} \frac{e^{-a} a^{r}}{r!}$$

x	a = 0.2	a = 0.3	a = 0.4	a = 0.5	a = 0.6
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	.1812692	.2591818	.3296800	.393469	.451188
2	.0175231	.0369363	.0615519	.090204	.121901
3	.0011485	.0035995	.0079263	.014388	.023115
4	.0000568	.0002658	.0007763	.001752	.003358
5	.0000023	.0000158	.0000612	.000172	.000394
6	.0000001	.0000008	.0000040	.000014	.000039
7			.0000002	.000001	.000003

x	a = 0.7	a = 0.8	a = 0.9	a = 1.0	a = 1.2
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.000000	1.0000000
1	.503415	.550671	.593430	.632121	.698806
2	.155805	.191208	.227518	.264241	.337373
3	.034142	.047423	.062857	.080301	.120513
4	.005753	.009080	.013459	.018988	.033769
5	.000786	.001411	.002344	.003660	.007746
6	.000090	.000184	.000343	.000594	.001500
7	.000009	.000021	.000043	.000083	.000251
8	.000001	.000002	.000005	.000010	.000037
9				.000001	.000005
10					.000001

x	a = 1.4	a = 1.6	a = 1.8	a = 1.9	a = 2.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	.753403	.798103	.834701	.850431	.864665
2	.408167	.475069	.537163	.566251	.593994
3	.166502	.216642	.269379	.296280	.323324
4	.053725	.078813	.108708	.125398	.142877
5	.014253	.023682	.036407	.044081	.052653
6	.003201	.006040	.010378	.013219	.016564
7	.000622	.001336	.002569	.003446	.004534
8	.000107	.00260	.000562	.000793	.001097
9	.000016	.000045	.000110	.000163	.000237
10	.000002	.000007	.000019	.000030	.000046
11		.000001	.000003	.000005	.000008

*E. C. Molina Poisson's Exponential Binomial Limit, D. Van Nostrand, Inc, 1947.

表 3 （續上頁）

$$1-F(x-1)=\sum_{r=x}^{r=\infty}\frac{e^{-a}a^{r}}{r!}$$

x	$a=2.5$	$a=3.0$	$a=3.5$	$a=4.0$	$a=4.5$	$a=5.0$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	.917915	.950213	.969803	.981684	.988891	.993262
2	.712703	.800852	.864112	.908422	.938901	.959572
3	.456187	.576810	.679153	.761897	.826422	.875348
4	.242424	.352768	.463367	.566530	.657704	.734974
5	.108822	.184737	.274555	.371163	.467896	.559507
6	.042021	.083918	.142386	.214870	.297070	.384039
7	.014187	.033509	.065288	.110674	.168949	.237817
8	.004247	.011905	.026739	.051134	.086586	.133372
9	.001140	.003803	.009874	.021363	.040257	.068094
10	.000277	.001102	.003315	.008132	.017093	.031828
11	.000062	.000292	001019	.002840	.006669	.013695
12	.000013	.000071	.000289	.000915	.002404	.005453
13	.000002	.000016	.000076	.000274	.000805	.002019
14		.000003	.000019	.000076	.000252	.000698
15		.000001	.000004	.000020	.000074	.000226
16			.000001	.000005	.000020	.000069
17				.000001	.000005	.000020
18					.000001	.000005
19						.000001

表4 Student's t 分配的臨界值

Pr {Student's $t \leq$ tabled value} = γ

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.3398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6875	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3223	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6810	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7043
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

*D.B. Owen *Handbook of Statistical Tables*, *Addison-Wesley Publishing Co.* 1962. *(Courtesy Atomic Energy Commission, Washington, D.C.)*

表 4 （續上頁）

Pr { Students $t \leq$ tabled value} = γ

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316

表 5　Chi-square 分配的臨界值

Pr {x^2 r.v. with f degrees of freedom ≤ tabled value} $=\gamma$

f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	-	-	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291

*D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Addison-Wesley Publishing Co, 1962. (Courtesy Atomic Energy Commission, Washington, D.C.)

表 5　（續上頁）

Pr{χ^2 r.v. with f degrees of freedom $\leq$ tabled value} $= \gamma$

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.345	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	29.330	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

表6　隨機數表

07018	31172	12572	23968	55216	85366	56223	09300	94564	18172
52444	65625	97918	46794	62370	59344	20149	17596	51669	47429
72161	57299	87521	44351	99981	55008	93371	60620	66662	27036
17918	75071	91057	46829	47992	26797	64423	42379	91676	75127
13623	76165	43195	50205	75736	77473	07268	31330	07337	55901
27426	97534	89707	97453	90836	78967	00704	85734	21776	85764
96039	21338	88169	69530	53300	29895	71507	28517	77761	17244
68282	98888	25545	69406	29470	46476	54562	79373	72993	98998
54262	21477	33097	48125	92982	98382	11265	25366	06636	25349
66290	27544	72780	91384	47296	54892	59168	83951	91075	04724
53348	39044	04072	62210	01209	43999	54952	68699	31912	09317
34482	42758	40128	48436	30254	50029	19016	56837	05206	33851
99268	98715	07545	27137	52459	75366	43688	27460	65145	65429
95342	97178	10401	31615	95784	77026	33087	65961	10056	72834
38556	60373	77935	64608	28949	94764	45312	71171	15400	72182
39150	04795	51163	84475	60722	35268	05044	56420	39214	89822
41786	18169	96649	92406	42773	23672	37333	85734	99886	81200
95627	30768	30607	89023	60730	31519	53462	90489	81693	17849
98738	15548	42263	79489	85118	97073	01574	57310	59375	54417
75214	61575	27805	21930	94726	39454	19616	72239	93791	22610
73904	89123	19271	15792	72675	62175	48746	56084	54029	22296
33329	08896	94662	05781	59187	53284	28024	45421	37956	14252
66364	94799	62211	37539	80172	43269	91133	05562	82385	91760
68349	16984	86532	96186	53893	48268	82821	19526	63257	14288
19193	99621	66899	12351	72438	99839	24228	32079	53517	18558
49017	23489	19172	80439	76263	98918	59330	20121	89779	58862
76941	77008	27646	82072	28048	41589	70883	72035	81800	50296
55430	25875	26446	25738	32962	24266	26814	01194	48587	93319
33023	26895	65304	34978	43053	28951	22676	05303	39725	60054
87337	74487	83196	61939	05045	20405	69324	80823	20905	68727
81773	36773	21247	54735	68996	16937	18134	51873	10973	77090
74279	85087	94186	67793	18178	82224	17069	87880	54945	73489
34968	76028	54285	90845	35464	68076	15868	70063	26794	81386
99696	78454	21700	12301	88832	96796	59341	16136	01803	17537
55282	61051	97260	89829	69121	86547	62195	72492	33536	60137
31337	83886	72886	42598	05464	88071	92209	50728	67442	47529
94128	97990	58609	20002	76530	81981	30999	50147	93941	80754
06511	48241	49521	64568	69459	95079	42588	98590	12829	64366
69981	03469	56128	80405	97485	88251	76708	09588	86759	15065
23701	56612	86307	02364	88677	17192	23082	00728	78660	74196
09237	24607	12817	98120	30937	70666	76059	44446	94188	14060
11007	45461	24725	02877	74667	18427	45658	40044	59484	59966
60622	78444	39582	91930	97948	13221	99234	99629	22430	49247
79973	43668	19599	30021	68572	31816	63033	14597	28953	21162
71080	71367	23485	82364	30321	42982	74427	25625	74309	15855
09923	26729	74573	16583	37689	06703	21846	78329	98578	25447
63094	72826	65558	22616	33472	67515	75585	90005	19747	08865
19806	42212	41268	84923	21002	30588	40676	94961	31154	83133
17295	74244	43088	27056	86338	47331	09737	83735	84058	12382
59338	27190	99302	84020	15425	14748	42380	99576	30496	84523

The Rand Corporat on, A Million Random Digits with 100,000 *Normal Deviates, The Free Prees*, 1955.

表6 （續上頁）

96124	73355	01925	17210	81719	74603	30305	29383	69753	61156
31283	54371	20985	00299	71681	22496	71241	35347	37285	02028
49988	48558	20397	60384	24574	14852	26414	10767	60334	36911
82790	45529	48792	31384	55649	08779	94194	62843	11182	49766
51473	13821	75776	24401	00445	61570	80687	39454	07628	94806
07785	02854	91971	63537	84671	03517	28914	48762	76925	96837
16624	68335	46052	07442	41667	62897	40326	75187	36639	21396
28718	92405	07123	22008	83082	28526	49117	96627	38470	78905
33373	90330	67545	74667	20398	58239	22772	34500	34392	92989
36535	48606	11139	82646	18600	53898	70267	74970	35100	01291
47408	62155	47467	14813	56684	56681	31779	30441	19883	17044
56129	36513	41292	82142	13717	49966	35367	43255	06993	17418
35459	10460	33925	75946	26708	63004	89286	24880	38838	76022
61955	55992	36520	08005	48783	08773	45424	44359	25248	75881
85374	69791	18857	92948	90933	90290	97232	61348	22204	43440
15556	39555	09325	16717	74724	79343	26313	39585	56285	22525
75454	90681	73339	08810	89716	99234	36613	43440	60269	90899
27582	90856	04254	23715	00086	12164	16943	62099	32132	93031
89658	47708	01691	22284	50446	05451	68947	34932	81628	22716
57194	77203	26072	92538	85097	58178	46391	58980	12207	94901
64219	53416	03811	11439	80876	38314	77078	85171	06316	29523
53166	78592	80640	58248	68818	78915	57288	85310	43287	89223
58112	88451	22892	29765	20908	49267	18968	39165	03332	94932
14548	36314	05831	01921	97159	55540	00867	84294	54653	81281
21251	15618	40764	99303	38995	97879	98178	03701	70069	80463
30953	63369	05445	20240	35362	82072	29280	72468	94845	97004
12764	79194	36992	74905	85867	18672	28716	17995	63510	67901
72393	71563	42596	87316	80039	75647	66121	17083	07327	39209
11031	40757	10904	22385	39813	63111	33237	95008	09057	50820
91948	69586	45045	67557	86629	67943	23405	86552	17393	24221
18537	07384	13059	47389	97265	11379	24426	09528	36035	02501
66885	11985	38553	97029	88433	78988	88864	03876	48791	72613
96177	71237	08744	38483	16602	94343	18593	84747	57469	08334
37321	96867	64979	89159	33269	06367	09234	77201	92195	89547
77905	69703	77702	90176	04883	84487	88688	09360	42803	88379
53814	14560	43698	86631	87561	90731	59632	52672	24519	10966
16963	37320	40740	79330	04318	56078	23196	49668	80418	73842
87558	58885	65475	25295	59946	47877	81764	85986	61687	04373
84269	55068	10532	43324	39407	65004	35041	20714	20880	19385
94907	08019	05159	64613	26962	30688	51677	05111	51215	53285
45735	14319	78439	18033	72250	87674	67405	94163	16622	54994
11755	40589	83489	95820	70913	87328	04636	42466	68427	79135
51242	05075	80028	35144	70599	92270	62912	08859	87405	08266
00281	25893	94848	74342	45848	10404	28635	92136	42852	40812
12233	65661	10625	93343	21834	95563	15070	99901	09382	01498
88817	57827	02940	66788	76246	85094	44885	72542	31695	83843
75548	53699	90888	94921	04949	80725	72120	80838	38409	72270
42860	40656	33282	45677	05003	46597	67666	70858	41314	71100
71208	72822	17662	50330	32576	95030	87874	25965	05261	95727
44319	22313	89649	47415	21065	42846	78055	64776	64993	48051

表7　常態差異

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	.31	-.51	-1.45	-.35	.18	.09	.00	.11	-1.91	-1.07
01	.90	-.36	.33	-.28	.30	-2.62	-1.43	-1.79	-.99	-.35
02	.22	.58	.87	-.02	.04	.12	-.17	.78	-1.31	.95
03	1.00	.53	-1.90	-.77	.67	.56	-.94	.16	2.22	-.08
04	-.12	-.43	.69	.75	-.32	-.71	-1.13	-.79	-.26	-.86
05	.01	.37	-.36	.68	.44	.43	1.18	-.68	-.13	-.41
06	.16	-.83	-1.88	.89	-.39	.93	-.76	-.12	.66	2.06
07	1.31	-.82	-.36	.36	.24	-.95	.41	-.77	.78	-.27
08	-.38	-.26	-1.73	.06	-.14	1.59	.96	-1.39	.51	-.05
09	.38	.42	-1.39	-.22	-.28	-.03	2.48	1.11	-1.10	.40
10	1.07	2.26	-1.68	-.04	.19	1.38	-1.53	-1.41	.09	-1.91
11	-1.65	-1.29	-1.03	.06	2.18	-.55	.34	-1.07	.80	-.77
12	1.02	-.67	-1.11	.08	-1.92	-.97	-.70	-.04	-.72	.47
13	.06	1.43	-.46	-.62	-.11	.36	.64	-.27	.72	.68
14	.47	-1.84	.69	-1.07	.83	-.25	-.91	-1.94	.96	.75
15	.10	1.00	-.54	.61	-1.04	-.33	.94	.56	.62	.07
16	-.71	.04	.63	-.26	-1.35	-1.20	1.52	.63	-1.29	1.16
17	-.94	-.94	.56	-.09	.63	-.36	.20	-.60	-.29	.94
18	.29	.62	-1.09	1.84	-.11	.19	-.45	.23	-.63	-.06
19	.57	.54	-.21	.09	-.57	-.10	-1.25	-.26	.88	-.26
20	.24	.19	-.67	3.04	1.26	-1.21	.52	-.05	.76	-.09
21	-1.47	1.20	.70	-1.80	-1.07	.29	1.18	.34	-.74	1.75
22	-.01	.49	1.16	.17	-.48	.81	1.40	-.17	.57	.64
23	-.63	-.26	.55	-.21	-.07	-.37	.47	-1.69	.05	-.96
24	.85	-.65	-.94	.12	-1.67	.28	-.42	.14	-1.15	-.41
25	1.07	-.36	1.10	.83	.37	-.20	-.75	-.50	.18	1.31
26	1.18	-2.09	-.61	.44	.40	.42	-.61	-2.55	-.09	-1.33
27	.47	.88	.71	.31	.41	-1.96	.34	-.17	1.73	-.33
28	.26	.90	.11	.28	.76	-.12	-1.01	1.29	-.71	2.15
29	.39	-.88	-.15	-.38	.55	-.41	-.02	-.74	-.48	.46
30	-1.01	-.89	-1.23	.07	-.07	-.08	-.08	-1.95	-.34	-.29
31	1.36	.18	.85	.55	.00	-.43	.27	-.39	.25	.69
32	1.02	-2.49	1.79	.04	-.03	.85	-.29	-.77	.28	-.33
33	-.53	-1.13	.75	-.39	.43	.10	-2.17	.37	-1.85	.96
34	.76	1.21	-.68	.26	.93	.99	1.12	-1.72	-.04	-.73
35	.07	-.23	-.88	-.23	.68	.24	1.38	-2.10	-.79	-.27
36	.27	.61	.43	-.38	.68	-.72	.90	-.14	-1.61	-.88
37	.93	.72	-.45	2.80	-.12	.74	-1.47	.39	-.61	-2.77
38	1.03	-.43	.95	-1.49	-.63	.22	.79	-2.80	-.41	.61
39	-.32	1.41	-.23	-.36	.60	-.59	.36	.63	.73	.81
40	1.41	.64	.06	.25	-1.75	.39	1.84	1.23	-1.27	-.75
41	.25	-.70	.33	.12	.04	1.03	-.64	.08	-1.63	.34
42	-1.15	.57	.34	-.32	2.31	.74	.85	-1.25	-.17	.14
43	.72	.01	.50	-1.42	.26	-.74	-.55	1.86	-.17	-.10
44	-.92	.15	-.66	.83	.50	.24	-.40	1.90	.35	.69
45	-.42	.62	.24	.55	-.06	.14	-1.09	-1.53	.30	-1.56
46	-.54	1.21	-.53	.29	1.04	-.32	-1.20	.01	.05	.20
47	-.13	-.70	.07	.69	.88	1.18	.61	-.46	-1.54	.50
48	-.29	.36	1.44	-.44	.53	-.14	.66	.00	.33	-.36
49	1.90	-1.21	-1.87	-.27	-1.86	-.49	.25	.25	.14	1.73

表7 （續上頁）

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
00	-.73	.25	-2.08	.17	-1.04	-.23	.74	.23	.70	-.79
01	-.87	-.74	1.44	-.79	-.76	-.42	1.93	.88	.80	-.53
02	1.18	.05	.10	-.15	.05	1.06	.82	.90	-1.38	.51
03	-2.09	1.13	-.50	.37	-.18	-.16	-1.85	-.90	1.32	-.83
04	-.32	1.06	1.14	-.23	.49	1.18	-.27	-.64	.47	-.05
05	.90	-.86	.63	-1.62	-.52	-1.55	.78	-.54	-.29	.19
06	-.16	-.22	-.17	-.81	.49	.96	.53	1.73	.14	1.21
07	.15	-1.12	.80	-.30	-.77	-.91	.00	.94	-1.16	.44
08	-1.87	.72	-1.17	-.36	-1.42	-.46	-.58	.03	2.08	1.11
09	.87	.95	.05	.46	-.01	.85	1.19	-1.61	-.10	-.87
10	.52	.12	-1.04	-.56	-.91	-.13	.17	1.17	-1.24	-.84
11	-1.39	-1.18	1.67	2.88	2.06	.10	.05	-.55	.74	.33
12	-.94	-.46	-.85	-.29	.54	.71	.90	-.42	-1.30	.50
13	-.51	.04	-.44	-1.87	-1.06	1.18	-.39	.22	-.55	-.54
14	-1.50	-.21	-.89	.43	-1.81	-.07	-.66	-.02	1.77	-1.54
15	-.48	1.54	1.88	.66	-.62	.28	-.34	2.42	-1.65	2.06
16	.89	-.23	.57	.23	1.81	1.02	.33	1.23	1.31	.06
17	.38	1.52	-1.32	2.13	-.14	.28	-.46	.25	.65	1.18
18	-.53	.37	.19	-2.41	.16	.36	-.15	.14	-.15	-.73
19	.15	.62	-1.29	1.84	.80	-.65	1.72	-1.77	.07	.46
20	-.81	-.22	1.16	1.09	-.73	-.15	.87	-.88	.92	-.04
21	-1.61	2.51	-2.17	.49	-1.24	1.16	.97	.15	.37	.18
22	.26	-.48	-.43	-2.08	.75	1.59	1.78	-.55	.85	-1.87
23	-.32	75	-.35	2.10	-.70	1.29	.94	.20	-1.16	.89
24	-1.00	1.37	.68	.00	1.87	-.14	.77	-.12	.89	-.73
25	.66	.04	-1.73	.25	.26	1.46	-.77	-1.67	.18	-.92
26	-.20	-1.53	.59	-.15	-.15	-.11	.68	-.14	-.42	-1.51
27	1.01	-.44	-.20	-2.05	-.27	-.50	-.27	-.45	.83	.49
28	1.81	.45	.27	.67	-.74	-.17	-1.11	.13	-1.18	-1.41
29	-1.40	1.34	1.50	.57	-1.78	.08	.95	.69	38	.71
30	-.01	.15	-1.83	1.18	.11	.62	1.86	.42	.03	-.14
31	-.23	-.19	-1.08	.44	-.41	-1.32	.14	.65	-.76	.76
32	-1.27	.13	-.17	-.74	-.44	1.67	-.07	-.99	.51	.76
33	-1.72	1.70	-.61	.18	.48	-.26	-.12	-2.83	2 35	1.25
34	.78	1.55	-.19	.43	-1.53	-.76	.83	-.46	48	-.43
35	1.86	1.12	-2.09	1.82	-.71	-1.76	-.20	-.38	82	-1.08
36	1.50	-.93	-.68	-1.62	-.88	.05	-.27	.23	- 58	-.24
37	1.02	-.81	-.62	1.46	-.31	-.37	.08	.59	-.27	.37
38	-1.57	.10	.11	-1.48	1.02	2.35	.27	-1.22	-1.26	2.22
39	2.27	-.61	.61	-.28	-.39	-.45	-.89	1.43	-1.03	-.01
40	-2.17	-.69	1.33	-.26	.15	-.10	-.78	.64	- 70	.14
41	.05	-1.71	.21	.55	-.60	-.74	-.90	2.52	- 07	-1.11
42	-.38	1.75	.93	-1.36	-.60	-1.76	-1.10	.42	1.64	-.58
43	.40	-1.50	.24	-.66	.83	.37	-.35	.16	.96	.79
44	.39	.66	.19	-2.08	.32	-.42	-.53	.92	.69	-.03
45	-.12	1.18	-.08	.30	-.21	.45	-1.84	.26	.90	.85
46	1.20	-.91	-1.08	-.99	1.76	-.80	.51	.25	-.11	-.58
47	-1.04	1.28	2.50	1.56	-.95	-1.02	.45	-1.90	-.02	-.73
48	-.32	.56	-1.03	.11	-.72	.53	-.27	-.17	1.40	1.61
49	1.08	.56	.34	-.28	-.37	.46	.03	-1.13	.34	-1.08

0